(cc) BY

Чебышова Галина Николаевна
учитель
МБОУ «Аннинская СОШ №1»
пгт. Анна, Воронежская область

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ В РЕШЕНИИ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Аннотация*: в статье рассматриваются различные формулировки принципа Дирихле. Автором приводятся конкретные примеры применения данного принципа при решении олимпиадных задач по математике.*

Ключевые слова*: олимпиадные задачи, решение задач, принцип Дирихле.*

Умение решать школьником олимпиадные задачи, всегда является важным показателем математической подготовки ученика. Что же относится к олимпиадным задачам? В литературе встречаются два основных ответа на этот вопрос. Первый ответ – это олимпиадные задачи, так называемой «повышенной трудности», они присутствуют в школьных учебниках и их методы решения рассматриваются по школьной программе. Второй ответ – это задачи, при решении которых используются специальные методы и правила, которые не рассматриваются в школьном курсе математики. К таким методам можно отнести: принцип Дирихле, метод неопределенных коэффициентов, применение формул сложных радикалов, метод инвариантов и некоторые другие. В последние годы стали чаще на олимпиадах встречаются задачи на применение принципа Дирихле. В школьном курсе как таковой принцип Дирихле не изучается, только рассматривается метод доказательства от противного.

Принцип Дирихле устанавливает соотношение между двумя множествами. Существуют несколько формулировок данного принципа. Самая популярная следующая: «Если в n клетках сидят m зайцев, причем m > n, то хотя бы в одной клетке сидят, по крайней мере, два зайца». Это совершенно очевидное предложение является мощным математическим методом для решения сложных олимпиадных задач, потому что в каждой конкретной задаче не всегда легко понять,

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

что выступает в роли «зайцев», а что в роли «клеток». Выбор «зайцев» и «клеток» зачастую неочевиден, и по формулировке задачи не всегда можно сразу определить, что следует применить принцип Дирихле.

Рассмотрим другие формулировки Принципа Дирихле [1], [5]:

− если в n клетках сидят не более (n-1) «зайцев», то есть пустая «клетка».

− если в n клетках сидят (n+1) «зайцев», то есть клетка, в которой не менее 2-х «зайцев».

− если в n клетках сидят не более (nk-1) «зайцев», то в какой-то из клеток сидят не более (k-1) «зайцев». (обобщенный принцип Дирихле)

− если в n клетках сидят не менее (nk+1) «зайцев», то в какой-то из клеток сидят не менее k+1 «зайцев». (обобщенный принцип Дирихле)

− среди p + 1 целых чисел найдутся два числа, дающие при делении на p один и тот же остаток.

− среди любых n + 1 целых чисел найдутся два числа таких, что их разность делится на n.

− если на отрезке длины l расположено несколько отрезков с суммой длин больше l, то хотя бы два из них имеют общую точку.

− если на окружности радиуса r расположено несколько дуг, сумма длин которых больше 2π, то, по крайней мере, две из них имеют общую точку

− если внутри фигуры площади s находится несколько фигур, имеющих сумму площадей больше s, то хотя бы две из них имеют общую точку.

Применять принцип Дирихле можно в различных разделах математики: арифметике, геометрии, комбинаторике, теории чисел. Рассмотрим примеры решения задач с использованием принципа Дирихле.

Пример 1. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок [6].

Решение: перед нами миллион «кроликов» – елок и всего лишь 600001 «клетка» с номерами от 0 до 600000. Каждый «кролик» – елка сажается нами в «клетку» с номером, равным количеству иголок на этой елке. Так как «кроликов»

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

больше, чем «клеток», то в какой-то «клетке» сидит по крайней мере два «кролика» – если бы в каждой сидело не более одного, то всего «кроликов» – елок было бы не более 600001 штук. Но ведь, если два «кролика» – елки сидят в одной «клетке», то количество иголок у них одинаково.

Пример 2. Дано 12 целых чисел. Доказать, что из них можно выбрать два числа, разность которых делится на 11 [6].

Решение: примем числа за «зайцев». Так как их 12, то «клеток» должно быть меньше. Пусть «клетки»- это остатки от деления целого числа на 11. Всего клеток 11: 0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10. Тогда по принципу Дирихле найдется «клетка», в которой будут сидеть не менее чем 2 «зайца», то найдутся два целых числа с одним остатком. А разность двух чисел с одинаковым остатком от деления на 11, будет делиться на 11. $A = (11a + r$; $B = 11b + r$; $A – B = 11(a – b))$

Пример 3. Имеется 11 различных натуральных чисел, не больших 20. Докажите, что из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое [8].

Решение: разобьем числа от 1 до 20 на 10 наборов, в каждом из которых в любой паре чисел одно делится на другое: 11, 13, 15, 17, 19, 1,2,4,8,16, 3,6,12, 5,10,20, 7,14, 9,18. Тогда наборы – это «клетки», а сами числа – «зайцы». Т.к.11 >10, то найдется 2 числа, одно из которых делится на другое.

Пример 4. На ковре размером 4х4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1х1 метр, не содержащий внутри себя дырок (дырки надо считать точечными) [6].

Решение: разрежем ковёр на 16 ковриков размером 1х1метр. Так как ковриков- «клеток»-16, а дырок -»зайцев» 15-, то найдется хотя бы одна «клетка», в которой не будет «зайцев», то есть найдется коврик без дырки внутри.

Пример 5. Каждая грань куба раскрашена в чёрный или белый цвет. Доказать, что найдутся одинаково раскрашенные грани, имеющие общее ребро [4].

Решение: рассмотрим любую вершину куба. В ней пересекаются три грани. Примем за «клетки» цвета, а за зайцев грани, пересекающиеся в одной вершине (их три). Поэтому, согласно принципу Дирихле, найдутся два «зайца» в одной

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

«клетке», а это и означает, что найдутся две грани, имеющие общее ребро (так как они имеют общую точку) и окрашенные одинаково.

Пример 6. Какое наибольшее число королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга? [6]

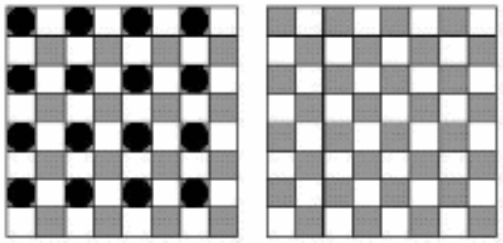

Рис. 1

Решение: начнем с того, что на шахматной доске 64 клетки. Король может ходить в любую сторону, но только на одну клетку. Всего на шахматной доске можно расположить 16 королей так, как показано на рисунке 1. Теперь докажем, почему 16 – это максимальное число королей, которые мы можем расположить на шахматной доске. Тут мы воспользуемся методом «от противного». Предположим, что мы можем разместить на доске 17 королей, разбив доску на 16 равных квадратов 2x2, как показано на рисунке 2. Давайте примем эти квадраты за «клетки», а королей – за «зайцев», то по принципу Дирихле хотя бы в одном «клетке» будет больше одного короля, то есть на одной клетке располагаются 2 короля, а такое невозможно т. к, если два короля находятся в одной «клетке» 2x2, то они бьют друг друга. Значит на шахматной доске можно разместить не больше 16 королей.

Из рассмотренных примеров задач можно сделать вывод, что принцип Дирихле дает «простое» решение «непростых» задач. Поэтому учащихся, интересующихся математикой, нужно обязательно знакомить с этим принципом, это поможет им более успешными в различных олимпиадах.

Список литературы

1. Андреев А.А. Математика. Принцип Дирихле / А.А. Андреев, Г.Н. Горелов, А.И. Люлев [и др.]. – Вып. 1. – 1975.

2. Болтянский В.Г. Шесть зайцев в пяти клетках / В.Г. Болтянский // Квант. – 1977. – №2.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

3. Математика. №7. – М.: Первое сентября, 1996.

4. Летчиков А.В. Принцип Дирихле. Задачи с указаниями и решениями: учебное пособие / А.В. Летчиков. – Ижевск: Удмуртский университет, 1992. – 108 с.

5. Севрюков П.Ф. Школа решения олимпиадных задач по математике / П.Ф. Севрюков. – М.: Илекса; Ставрополь: Сервисшкола, 2012. – 176 с. EDN QKAHHJ

6. Фарков А.В. Готовимся к олимпиадам по математике: учебно-методическое пособие / А.В. Фарков. – 4-е изд. – М.: Экзамен, 2007. – 157 с.

7. Инфоурок [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://infourok.ru/

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)