

Павлов Андрей Валерианович

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический
университет радиотехники, электроники и автоматики»

г. Москва

DOI 10.21661/r-561906

ПЕРИОДИЧНОСТЬ ДЛЯ РАЗНЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ

Аннотация: доказано, что производная обратной функции с точки зрения двух систем координат становится периодичной с некоторым действительным периодом для широкого класса аналитических функций. Аналогичный результат получается, как следствие введения новой системы координат и рассмотрения уравнений одного многообразия в этих системах с разных точек зрения. После введения новой системы координат одно геометрическое многообразие для уравнения аналитической комплексной функции $z = f(p)$ имеет два разных решения, соответствующих одному z , что возможно только в случае периодичности исходной функции. Аналогичный результат получен для графиков производных действительных функций $y = f(x)$. Доказательство теорем статьи не использует совпадение аналитических функций с полями сдвигов и опирается только на известные факты математического анализа.

Ключевые слова: периодичность аналитической функции, графики в разных системах координат, неоднозначность представления функций, разные системы координат.

Введение.

Статья посвящена исследованию аналитических функций в разных системах координат [1, 2]. Уравнения аналитической функции $z = f(p)$ в новой системе координат с центром в точке $(A, 0)$ совпадает с уравнением $z = f(r + A) = g(r)$, $p, r \in G$, $p = r + A$, r — комплексные переменные в исходной и сдвинутой вправо при $A > 0$ системах координат, G — некоторая открытая область комплексной плоскости.

Появление периодичности для комплексных функций $z = f(p)$ в общей ситуации возможно, например, с точки зрения данного примера, [1]: при фиксированном сопоставлении точкам P комплексной плоскости значений z из уравнения $z = f(p + A)$, (с точки зрения графика уравнения $y = f(x + A)$ в действительном случае при действительных $z = y, p = x$), данное сопоставление является вторым уравнением исходного аналитического многообразия, заданного уравнением $z = f(p)$; мы использовали то, что для сдвинутого вместе с z на величину $A > 0$ вправо аналитического многообразия (графика) $z = f(p)$ значению «сдвинутого» z соответствует значение (аргумент) $p + A$, (как проекция на плоскость комплексных аргументов z при решении уравнения $z = f(p + A)$), в котором p то же самое как p при решении уравнения $z = f(p)$ с тем же самым z до его сдвига вправо на величину $A > 0$. Второе уравнение получилось с точки зрения существования сдвинутого вправо на величину $A > 0$ аналитического многообразия.

Аналогичная ситуация для производных функции f рассматривается в теореме 1 для графиков производных действительной функции $y = f(x)$ в двух системах координат в случае $y = f(x), y = g(X), y = z, x = p, X = r$, [2]. В теореме 1 используется следующий факт, [2]: разность обратных функций в любой точке z комплексной плоскости равна

$$f_{-1}(z) - g_{-1}(z) = (r + A) - r = A = \text{const.}$$

Следовательно, производные обратных функций совпадают:

$$df_{-1}(z)/dz = dg_{-1}(z)/dz.$$

В случае действительных переменных $p = x, z = y, r = X$ данное рассуждение приводит или к совпадению графиков двух функций $y = df(x)/dx$ и $y = dg(X)/dX$, нарисованных в разных системах координат, или к нарушению единственности значений производных исходных функций $y = f(x)$ и $y = g(X)$, которую можно требовать по условию для общего класса исходных функций с монотонными производными. Данный факт в теореме 1 следует из возможности однозначно восстановить значения производной монотонной функции по производным об-

ратных функций без использования выражения функции $y = f(x)$, ввиду того, что график функции $V(y) = df_{-1}(y)/dy = x$ и график функции, у которой каждому y сопоставляется «перевернутое» значение $F(y) = 1/(df_{-1}(y)/dy) = x$ образуют одинаковую картинку при сопоставлении каждому y известного значения $V(y)$ и при сопоставлении определенного тоже известного значения $1/V(y)$ во втором случае, (значения одного уравнения при любом y сравниваются со значениями второго уравнения в той же точке). С точки зрения новой переменной y вместо x график $F(y) = x$ совпадает с графиком $x = df(y)/dy$, (теорема 1).

К аналогичному выводу о периодичности самих функций $z = f(p)$, которую мы не предполагали, приводит доказательство теоремы 2 [1].

1. Периодичность с точки зрения новых систем координат.

Определим понятие аналитического отображения точек плоскости для функции $z = f(p)$ как отображения точек (не векторов) концов радиус-векторов $\bar{p}$ плоскости с помощью уравнения $z = f(p), p \in G$.

По определению, обратная функция $f_{-1}(z) = p$ к функции $z = f(p)$ в исходной системе координат с аргументом p совпадает с выражением $f_{-1}(z) = p$ при всех z из области значений F исходной аналитической функции $f(p)$: $f_{-1}(f(p)) = p$. В данной статье обратные функции определены однозначно. Аналогично определяется обратная функция $g_{-1}(g(r)) = r$.

В теореме 1 нам понадобится определение симметричной области G_{2sim} , повторяющей произвольную область G_2 , во второй системе координат с переменной r , (область $G_2 \in G$ определена в исходной системе координат): по определению, область G_{2sim} состоит из всех концов радиус-векторов $\bar{r}$ таких, что $\bar{r} = \bar{p}$ при всех $\bar{p} \in G_2$.

В теореме 1 для простоты изложения в области значений производной функции $z = f(p)$ не существует двух одинаковых значений: $df(p_1)/dp \neq df(p_2)/dp$ при всех $p_1 \neq p_2, p_1, p_2 \in G$.

Теорема 1.

1. Многообразие производных $G_f = \{ (z, p) : p = df_{-1}(z)/dz, z \in F_0 \}$, обратной функции $f_{-1}(z) = p$ произвольной аналитической в некоторой открытой области G функции $z = f(p)$ совпадает с многообразием производных $G_g = \{ (z, r) : r = dg_{-1}(z)/dz, z \in F_0 \}$ этого же аналитического отображения, заданного функцией $z = g(r) = f(r + A)$ в новой системе координат с центром в точке $(A, 0), p = r + A, (F_0 - \text{область значений } f(p))$.

2. Многообразия производных исходных функций $G_{df/dp} = \{ (z, p) : z = df(p)/dp, p \in G, \}$ и $G_{dg/dr} = \{ (z, r) : z = dg(r)/dr \}$ совпадают при всех одинаковых значениях аргументов $\bar{r} = \bar{p} : \bar{p} \in G_2 \cap \bar{r} \in G_{2sim}$, при произвольной открытой подобласти $G_2 \in G$ такой, что симметричная область $G_{2sim} \in G$.

Доказательство.

Повторяя рассуждение введения, получаем: $f_{-1}(z) - g_{-1}(z) = A = const$. Следовательно, $df_{-1}(z)/dz = dg_{-1}(z)/dz$ при всех z из области значений исходного аналитического отображения $z = f(p)$. Дальнейшее доказательство повторяет рассуждение введения для действительных графиков $y = f(x)$ и $y = g(X)$ при комплексных $y = z, x = p, X = r$, из которого следует, что два одинаковых многообразия $\{ (z, p) : 1/(df_{-1}(z)/dz) = p \} = \{ (z, p) : z = df(p)/dp \}$, $\{ 1/(dg_{-1}(z)/dz) = r \} = \{ (z, r) : z = dg(r)/dr \}$ определены каждая в непустых одинаковых открытых областях, при $\bar{r} = \bar{p}, \bar{r} \in G, \bar{p} \in G$ ввиду аналитичности в G функций f, g . При том же z , (так как $p = df_{-1}(z)/dz = dg_{-1}(z)/dz = r$), значения производных обратных функций $p = r$ одно и то же, и в этой же точке $p = r$ совпадают производные самих функций f, g , равные $1/(df_{-1}(z)/dz) = 1/(dg_{-1}(z)/dz)$, или нарушается

единственность значений производных данных функций. (Мы доказали равенство многообразий производных в симметричных векторах двух систем координат, а не в точках области определения f и g при разных векторах $p, r: p - r = A$ как должно быть с точки зрения изображений многообразий производных).

Отмеченный факт возможен только в случае совпадения многообразий производных $\{(r, z): z = dg(r)/dr\} = \{(p, z): z = df(p)/dp\}$ исходных функций f, g в разных системах координат, что эквивалентно периодичности $f(p)$ с периодом A , которую мы не предполагали по условию.

Теорема 2.

Если $z = f(p)$ аналитична в открытой области G , то с точки зрения геометрических аналогий аналитические отображения точек плоскости для уравнений $z = g(p - A), (\cdot) p \in D$, и $z = g(r - A), (\cdot) r \in D$, совпадают для любой открытой области комплексных векторов $D \in G$.

Доказательство.

В уравнении $z = g(p - A)$ одно значение $r = r_0 = p - A$ находится из равенства $z = g(r), r = r_0$, второе значение r при фиксированном z получается при рассмотрении уравнения $z = g(r - A)$, в котором при совпадении $r - A = p - A = r_0$ после математически правомочной замены $z = g(r - A) = g(s)$ с переменной s в третьей системе координат с центром в $(2A, 0)$ можно сделать вторую математически правомочную, (как бы обратную замену, сначала сдвинув z на величину $A > 0$ вправо), замену $s = r - A$, не меняя z , то есть в равенстве $z = g(r - A), r - A = s$ должно существовать решение уже второго уравнения $z = g(r - A)$. Мы доказали, что кроме исходного аргумента r появляется математически определенный без противоречий другой аргумент r .

Теорема 2 доказана.

Из доказательства следует, что многообразия комплексных пар чисел $(z, p): z = g(p - A), p \in G_1$ при всех $p = r$ и $(z, r): z = g(r), r \in G_1$ при всех $p = r$ совпадают, если аргументы p, r считать комплексными векторами. (Тот же самый ре-

зультат без использования понятия сдвига несложно получить, если использовать выражения поля сдвигов $F(p) = f(2A - p)$, $p \in G$, статьи [2] с помощью уравнений введения в системах координат с переменными p, r .

С точки зрения этих равенств мы доказали утверждение второго примера статьи [1], и совпадение исходного аналитического отображения $z = f(p)$ с его полем сдвигов $F(p)$ из статьи [2].

К аналогичному выводу приводит и рассмотрение обратных функций в замечании 1.

Замечание 1.

Рассмотрим равенство $f_{-1}(z) + A = h_{-1}(z)$ для обратных к f и h функций, соответственно, в котором переменной p можно обозначать или $f_{-1}(z)$ или $h_{-1}(z)$. Здесь уравнения $f(p) = z$ и $z = h(p)$ суть уравнения исходного аналитического отображения $f(p) = z$ и уравнение сдвинутого вправо на величину $A > 0$ исходного аналитического отображения точек комплексной плоскости. После первого обозначения мы получаем, что $p + A = h_{-1}(z)$ и $h(p + A) = z$ суть уравнение уже сдвинутого многообразия, (а не $h(p) = z$ по определению), после второго обозначения получаем $f_{-1}(z) + A = p$, и $f(p - A) = z$ суть уравнение исходного аналитического отображения $f(p - A) = z$.

В данном доказательстве новых уравнений исходных аналитических отображений мы не использовали новой переменной r и новых систем координат при разных действительных A .

Список литературы

1. Pavlov, A.V. Different coordinate systems and periodicity // State Univer. Mathematical Physics and Computer Simulation. – 2023. Vol. 26. No 3. – Pp. 114–118. – DOI 10.15688/mpcm.jvolsu.2023.3.9. – EDN ZMJMLT
2. Павлов А.В. Отраженные функции и периодичность. Фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова // International Journal of Open Information Technologies. – 2022. – №6. – С. 33–39. – EDN RREOAZ

3. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.