Павлов Андрей Валерианович
канд. физ.-мат. наук, доцент
ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический
университет радиотехники, электроники и автоматики»
г. Москва

DOI 10.21661/r-561991

ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ РАЗНЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ

Аннотация*: при рассмотрении нескольких систем координат появляется периодичность как следствие аналитических выражений уравнений сдвинутых функции в разных системах координат. Доказательство теорем и опирается только на известные факты математического анализа. Во второй части статьи приводятся теоремы, описывающие непрерывно развивающиеся во времени процессы, позволяющие восстанавливать произвольные значения функций по значениям в целых точках 0, 1, 2, …, связанные с преобразованиями Лапласа. Данные теоремы аналогичны тождествам Шеннона-Котельникова для преобразований Лапласа, и приводят к доказательству проблемы Гильберта о существовании дискретного гильбертова пространства на всей действительной положительной полуоси.*

Ключевые слова*: периодичность аналитической функции, неоднозначность представления функций, разные системы координат, тождества типа Шеннона-Котельникова, преобразование Лапласа.*

Введение.

Статья посвящена двум темам: периодичности произвольных действительных и комплексных функций, возникающих при рассмотрении разных систем координат, [1–3], и проблеме Гильберта о существовании гильбертова пространства для функций, определенных на бесконечных носителях типа $(-\infty,\infty),[0,\infty)$, вытекающей из результатов автора, посвященных тождествам Шеннона-Котельникова для преобразований Лапласа в работе [4].

В первой части работы, являющейся продолжением статьи [3] автора, мы используем обозначения: уравнение произвольной функции $y = f(x)$ $(z = f(p)$ для комплексного случая) в новой системе координат с центром в точке $(A,0)$ совпадает с уравнением.

$z = f(r + A) = g(r), p = x, r = X \in G,$

$p = r + A, r$ – комплексные или действительные переменные в исходной и новой системе координат при произвольном действительном $A \neq 0$, G – некоторая открытая область комплексной плоскости, (интервал для действительного случая). В теореме 1 с точки зрения обыкновенных фактов математического анализа возможно возникновение периодичности для практически произвольного класса функций при использовании новых систем координат при разных A.

Во второй части данной статьи доказывается тождество типа тождества Шеннона-Котельникова, из которого следует явное представление значений таких функций при $x \in (-\infty, \infty)$, по значениям в целых точках 0, 1, 2, …, (тождество (1)). Приводится явная форма такого представления в виде ряда с известными коэффициентами одними и теми же для разных функций, (равенство (2)).

1. Периодичность произвольных функций.

Как и в статье [3] определим понятие *аналитического отображения* точек плоскости для функции $z = f(p)$ как отображения точек (не векторов) концов радиус-векторов $\overline{p}$ плоскости с помощью уравнения $z = f(p), p \in G$.

Для простоты изложения в первой части статьи в области значений функции $z = f(p)$ не существует двух одинаковых значений: $f(p_1) \neq f(p_2)$ при всех $p_1 \neq p_2, p_1, p_2 \in G$.

Доказательство теоремы 1 для случая действительных или комплексных переменных дословно одно и то же.

Теорема 1.

Для произвольной функции $z = f(p)$, определенной в некоторой открытой области G (интервале) исходное аналитическое многообразие точек (многообразие для уравнений $z = f(p), z = g(r)$) имеет два решения уравнения $z = g(r)$ при любом z из области значений z.

Доказательство.

Первое решение определяется из исходного равенства $z = g(r_0)$.

Для доказательства существования второго решения отметим, что в равенстве $z = g(r - A) = f(P)$ при $P = r_0$ дополнительную переменную P с концом P в точке конца радиус-вектора $r - A$ можно считать переобозначенным комплексным аргументом p, (радиус-вектор P проведен из центра координат в точке (0,0), радиус-вектор $r - A$ проведен из центра координат в точке (A,0)). Данный факт вытекает из совпадения многообразия $\{(z, P) : z = f(P)\}, P \in G$ и $\{(z, r = P) : z = g(P - A), P \in G\}$ ввиду равенства $g(p - A) = f(p)$, [3].

Так как $z = f(P) = g(r_1), r_1 = r_0 - A$ то теорема 1 доказана. (Можно также было заметить, что $z = f(P), z = f(p - A)$ при всех $P = p \in G$ – два уравнения одного аналитического исходного многообразия точек, для уравнения $z = g(r)$).

Замечание.

Отметим также следующий факт: результаты отражения функции $z = f(P)$ относительно точек (0,0,) и (A,0) совпадают с функциями $z = f(-p), z = f(2A - p)$. В случае двойной четности относительно данных точек эти равенства эквивалентны периодичности аналитической функции $z = f(p)$, $[0, 2A] \in G$.

2. Тождество типа Шеннона-Котельникова для спектральных разложений и преобразований Лапласа.

Теорема 2.

Пусть $r(t) = \int\limits_0^{\infty} Z(u) e^{-ut} du.$

1. Если Z(x) произвольная функция с к не более чем конечным числом разрывов на $[0, \infty)$ такая, что $\int\limits_0^{\infty} | Z(u) | du < \infty.$ то при всех $t \in [0, \infty)$ имеет место тождество:

$$r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k) \sum_{m=0}^{k} C_k^m (-1)^{k-m} r(-m), s(k) = t(t-1)...(t-k+1)/k!, t > 0; s(0) = 1. \quad (1)$$

2. Если $\int_0^\infty |Z(X)|e^{(K+1)X}dX<\infty.$, и функция Z(x) имеет непрерывную на $[0,\infty)$ производную К -ого порядка, то при $t\in[0,K)$, K=1, 2, …, тождество (1) тоже выполнено.

(При целых положительных $t=N\in 0,1,...$, первая сумма в (1) заменяется на соответствующую конечную сумму по k от нуля до N и равна r(N)).

Доказательство.

При $t\in 0,1,...$ теорема очевидна.

При всех $t>0, t\neq 1,2,...$, выполнено:

$$r(t)=\int_0^\infty [1+(e^{-u}-1)]^t Z(u)du=\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty s(k)(e^{-u}-1)^k Z(u)du=\sum_{k=0}^\infty s(k)\sum_{m=0}^k C_k^m(-1)^{k-m}\int_0^\infty e^{-mu}Z(u)du. \tag{2}$$

так как ряд под интегралом сходится равномерно [1–6], и следовательно сумма может быть вынесена за знак интеграла.

При $t\in[0,-K), K\in 1.2,...,$ остаток ряда под интегралом в (1.2) ввиду $|s(k)\le t^k/t!$, мажорируется:

$$|\sum_{k=N}^\infty s(k)(e^{-u}-1)^k|<|\sum_{k=N}^\infty s(k)(e^{-u}-1)^k|<e^{[t]u}(\sum_{k=N}^\infty(e^{-u}-1)^k)^{([t])}<$$
$$<e^{[t]u}((e^{-u}-1)^N\frac{1}{e^{-u}})^{([t])}. \tag{3}$$

Здесь [t] – целая часть числа ||t|, $[t]\ge|t|$. После [t] интегрирований по частям в интеграле:

$$\int_R^\infty e^{[t]u}|Z(u)|\left((e^{-u}-1)^N e^u\right)^{([t])}du=A(R) \tag{4}$$

получаем из условия леммы 1 с учетом $|Z(x)^{(l)}|e^{(K+1)x}\to 0, x\to\infty, l=0,1,...,K,$ что $A(R)\to 0, R\to\infty.$

Так как в интеграле до R возможность вынести бесконечную сумму за знак интеграла очевидна ($|e^{-u}-1|\le|e^{-R}-1|$), то теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Pavlov, A.V. Different coordinate systems and periodicity. Vol. State Univer. Mathematical Physics and Computer Simulation. 2023. 26. No. 3. Pp. 114–118. DOI 10.15688/mpcm.jvolsu.2023.3.9. EDN ZMJMLT

2. Павлов А.В. Отраженные функции и периодичность / А.В. Павлов // International Journal of Open Information Technologies. – 2022. – №6. – С. 33–39. – EDN RREOAZ

3. Павлов А.В. Периодичность для разных систем координат / А.В. Павлов // Вопросы науки и образования: новые подходы и актуальные исследования: сборник материалов Всеросс. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 29 февраля 2024 г.). – Чебоксары: Интерактив плюс, 2024. DOI 10.21661/r-561906.

4. Павлов А.В. Случайные ряды Фурье и их применение к теории фильтрации-прогноза / А.В. Павлов. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2000. – 64 с. ISBN 5–93839–002–8.

5. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

6. Чубариков В.Н. Об асимптотических формулах для интеграла И.М. Виноградова / В.Н. Чубариков // Математический институт АН СССР: сборник трудов. – 1981. – Т. 157. – С. 214 -232.