Павлов Андрей Валерианович
канд. физ.-мат. наук, доцент
ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики»
г. Москва

DOI 10.21661/r-562101

ПЕРИОДИЧНОСТЬ И ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МАТЕМАТИКЕ

Аннотация: *статья посвящена конструктивным доказательствам периодичности для широкого класса действительных и комплексных функций, которая возникает при рассмотрении разных систем координат на плоскости. С точки зрения полей сдвигов, совпадающих с выражениями F(p) = f(-x + iy) при p = x+iy, данные доказательства приводят к явно доказанным фактам о совпадении таких полей сдвигов с исходными функциями без нарушения аксиоматики теории функций. В первой части работы доказаны некоторые вспомогательные для данной статьи факты? связанные с леммой Жордана при использовании обращений преобразований Лапласа от интегральных преобразований Фурье.*

Ключевые слова*: периодичность аналитической функции, неоднозначность представления функций, разные системы координат, лемма Жордана, преобразование Лапласа.*

Введение.

Как и в статьях [1–4] мы используем уравнение $z = f(p)$ некоторой аналитической в произвольной открытой области G функции $f(p)$ в новой системе координат с центром в точке $(A,0)$.

В первой части данной статьи рассматриваются некоторые результаты, связывающие лемму Жордана и преобразование Лапласа от преобразований Фурье с точки зрения формул обращения данных преобразований. Результаты являются вспомогательными для основной второй части данной статьи, в которой точно доказаны главные факты работ [1,2,3], приводящие к математической неопределенности понятия графиков действительных функций или геометрических многообразий комплексных функций с точки зрения или появления нескольких математически обоснованных уравнений одного многообразия. (теорема 1 и первый пример введения, [2]), или с точки зрения возникновения двух разных комплексных переменных в одной системе координат как следствие разных связей между переменными нескольких систем координат на одной плоскости, (теорема 2 второй части).

В теореме 1 второй части данной работы используется следующий факт 1, [1]: уравнение $z=f(p+A)$ с точки зрения аналитического многообразия точек значений для данного уравнения, (с точки зрения графика уравнения $y=f(x+A)$ в действительном случае при действительных $z=y,x=p$), совпадает с уравнением $z=f(p)$; мы использовали то, что для сдвинутого вместе с z на $A>0$ вправо аналитического многообразия (графика) $z=f(p)$ значению «сдвинутого» z соответствует значение (аргумент) $p+A$, (как «проекция» на плоскость комплексных аргументов z при решении уравнения $z=f(p+A)$), в котором p то же самое как p при решении уравнения $z=f(p)$ с тем же самым z до его сдвига вправо при $A>0$).

К аналогичному выводу о возможной периодичности, которую мы не предполагали, приводит следующее рассуждение, (факт 2): уравнение $z=g(p-A)$ можно воспринимать двумя разными способами. Первый способ, как уравнение многообразия точек в исходной системе координат с центром в $(0,0)$ ввиду определения переменной p для исходной системы координат; и в этой ситуации уравнение совпадает с уравнением $z=g(R),R=p-A$, если $R=p-A$ при всех $R=r$ из обрасти определения r. То, что переменную R можно считать ранее определенной переменной p, следует из совпадения многообразия точек (графика) $z=g(R)$ с многообразием (графиком) сдвинутого на A исходного многообразия $z=g(r),r=p-A$ из второго способа восприятия этого уравнения. Второй способ вытекает из уравнения $z = g(r)$, после замены $p = r - A$ из определения p, r,[1,2]. В теореме 2 доказано также, что переменную R можно считать переменной $p = R = P$ при определении P из равенства $f(p) = g(p - A), P = p$.

К аналогичному выводу приводит следующее рассуждение: поменяем переменные x и y местами. После поворота новой оси OX (комплексной оси с переменной ix) по часовой стрелке на угол $\pi / 2$ и изменения направления новой (повернутой) оси OY на противоположное мы получим систему координат, у которой i переместилась от y к x, (вместо x+iy стало ix +y с теми же осями как в исходной системе координат). В данной системе координат исходное многообразие стало полем сдвигов по сравнению с $z = f(ix + y)$. С другой стороны, $z = f(ix + y) = f(i(x - iy)), f(i(x - iy)) = F(p), p = x + iy,$ и поворот на угол $\pi / 2$ и изменение направления исходной комплексной оси на противоположное приводит к уравнению аналитического многообразия $z = f(ip)$. Следовательно, уравнение $z = f(ix + y)$, в котором x и y поменялись местами должно быть аналитическим многообразием, а не полем сдвигов, что противоречит равенству $z = f(ix + y) = f(i(x - iy))$, в котором получившееся выражение является полем сдвигов для аналитической функции.

1. Лемма Жордана и преобразование Лапласа.

Основные для первой части данной статьи результаты изложены в следствиях 1, 2 и 4 к лемме 1.

Лемма 1.

Если $S_0(x)$ непрерывна при всех действительных x, если $\int_{-\infty}^{\infty} | S_0(x) | dx < \infty,$ то

$$L(p) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(x) dx \int_0^{\infty} e^{-(p+ix)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} S_0(x) dx, Re\, p > 0,$$

где $L(p) = \int_{-\infty}^{\infty} [S_0(x)/(p + xi)], Re\, p > 0$.

(Утверждения остаются верными и в случае, когда $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} S_0(x) dx \equiv 0,$ при всех $|t| > N > 0$).

Доказательство.

Для случая $u = Re\,p > 0$ возможность поменять пределы интегрирования вытекает из равномерной сходимостью внутреннего интеграла в исходном выражении $L(p)$, которая вытекает из неравенства

$$|e^{-(p+ix)t}| \le e^{-ut}, u > 0.$$

Лемма 1 доказана.

Следствие 1.

Если $S(x)$ произвольная функция с непрерывной на $[-B, B]$ второй производной, $S(-B) = S(B) = 0$, и

$$S_0(x) = \int_{-B}^{B} S(x)e^{ixu}du, B \in (0, +\infty),$$

то при любом $b > B > 0$

$$L(p) = \int_{-\infty}^{\infty} [S_0(x)/(p+xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} [S_0(x)[1 - e^{-(p+ix)b}]/(p+xi)]dx = L_b(p), Re\,p > 0,$$

и при всех $p : Re\,p > 0$ имеет место

$$e^{-pb}\int_{-\infty}^{\infty} [S_0(x)e^{-ixb}]/(p+xi)dx \equiv 0, Re\,p > 0, b = const.$$

Доказательство.

По формуле обращения преобразования Фурье получаем

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}S_0(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}dx\int_{-B}^{B} S(x)e^{ixu}du = 2\pi S(x)I(t),$$

$$I(t) = 1, t \in [-B, B], , I(t) = 0, |t| > B > 0.$$

Данное соотношение обеспечивает равенство

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}dt\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}S_0(x)dx = \int_0^{b} e^{-pt}dt\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}S_0(x)dx, Re\,p \ge 0, b > B > 0,$$

(условие $S(-B) = S(B) = 0$ с учетом формулы интегрирования по частям обеспечивает условие абсолютной сходимости леммы 1; существование и абсолютная сходимость производных второго порядка проверяется аналогично с помощью формулы интегрирования по частям в интеграле из определения

$S_0(x)$). После изменения порядка интегрирования по лемме 1 получаем первое утверждение теоремы 1 : $L(p) = L_b(p), Re\, p \geq 0$.

Второе утверждение является непосредственным следствием первого после вынесения за знак интеграла e^{-pb}.

Следствие 2.

В условиях следствия 1

$$J(p) = -\int_{-\infty}^{\infty} [S_0(x) e^{-(p+ix)b} / (p + xi)] dx \equiv 0, Re\, p < 0.$$

Доказательство.

После изменения пределов интегрирования $x = -x_1$

$$J_-(p) = \int_{-\infty}^{\infty} [S_0(x) e^{-(-p+ix)b} / (-p + xi)] dx = -\int_{-\infty}^{\infty} [S_0(-x) e^{(p+ix)b} / (p + xi)] dx.$$

Очевидно, существует предел (для нечетной $S(x)$)

$$-\int_{-\infty}^{\infty} [S_0(-x) e^{(p+ix)b} / (p + xi)] dx - (-\int_{-\infty}^{\infty} [S_0(x) e^{-(p+ix)b} / (p + xi)] dx) \to$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} [S_0(-x) e^{(iv+ix)b} / (iv + xi)] dx - \int_{-\infty}^{\infty} [S_0(x) e^{-(iv+ix)b} / (iv + xi)] dx = 0$$

(последнее соотношение очевидное следствие, например, следствия 3).

Для четной функции повторяем тоже самое рассуждение не для разности, а для суммы. Получаем: $0 = J(p) = J_-(p), Re\, p > 0$ (ввиду совпадения на мнимой границе аналитических в ее окрестности функций; проверка аналитичности в окрестности мнимой оси следует из очевидной аналитичности $L_b(p)$ во всей комплексной плоскости).

Равенство $0 = J_-(p)$ влечет утверждение следствия 2.

Следствие 3.

В условиях следствия 1 при всех $b > B > 0$

1.

$$-\int_{-\infty}^{\infty} S_0(x) e^{-(iv+ix)b} / (iv + xi)] dx = \pi S_0(-v), v \in (-\infty, \infty),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_0(-x)e^{(iv+ix)b}/(iv+xi)]dx = \pi S_0(v), v \in (-\infty,\infty),$$

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_0(x)\cos(v+x)b/(v+x)]dx = 0, v \in (-\infty,\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_0(x)\sin(v+x)b/(v+x)]dx = \pi S_0(-v), v \in (-\infty,\infty).$$

Доказательство.

Доказательство первого соотношения следует из равенства следствия 1 и несложно проверяемого равенства

$$L(iv) = \pi S_0(v) + \int_{-\infty}^{\infty} [S_0(x)/(iv+xi)]dx, v \in (-\infty,\infty), \tag{1}$$

(мы использовали формулу обращения синус и косинус преобразований Фурье ([5])). Можно проверить это равенство и с помощью леммы Жордана ([4]), вычитая и прибавляя под знаком интеграла в числителе $S_0(-v)$ и переходя к пределу при $p \to iv, v \in (-\infty,\infty)$.

Второе равенство получается после замены переменной $x = -x_1$ при подстановке вместо v значения $-v$. Второй пункт получается выделением действительной и мнимой части $L(iv)$.

2. Периодичность и два аргумента одной функции в новых координатах.

Как и в статьях [1,2,3] мы используем уравнение $z = f(p)$ некоторой аналитической в произвольной открытой области G функции $f(p)$ в новой системе координат с центром в точке $(A,0)$. Данное уравнение совпадает с уравнением $z = f(r+A) = g(r), p,r \in G$, здесь $p = r + A, r$ – комплексные переменные в системах координат с центрами в точках $(0,0)$ и $(A,0)$ соответственно.

В теореме 2 нам понадобится определение симметричной области G_{2sim}, повторяющей произвольную область G_2, во второй системе координат с переменной r (область $G_2 \in G$ определена в исходной системе координат): по определению, область G_{2sim} состоит из всех концов радиус-векторов $\bar{r}$ таких, что $\bar{r} = \bar{p}$ при всех $\bar{p} \in G_2$.

В теоремах 1 и 2 для простоты изложения в области значений функции $z = f(p)$ не существует двух одинаковых значений: $f(p_1) \neq f(p_2)$ при всех $p_1 \neq p_2, p_1, p_2 \in G$.

Определим также понятие аналитического отображения точек комплексной плоскости для функции $z = f(p)$ как отображения точек (не векторов) концов радиус-векторов $\bar{p}$ плоскости с помощью уравнения $z = f(p), p \in G$.

Содержанием примера 1 введения является теорема 1 для комплексных переменных p, z и следствие 1, аналогичное теореме 1 для графиков действительных функций $y = f(x + A)$ и $y = f(x)$ в случае действительных переменных x, y.

Теорема 1.

Если $z = f(p)$ определена в открытой области G, то с точки зрения геометрических аналогий аналитические отображения точек плоскости для уравнений $z = f(p + A)$ и $z = f(p)$ совпадают при всех р таких, что $p + A \in G, p \in G, A \in (0, \infty)$.

Следствие 1.

Если действительная функция $y = f(x)$ определена в произвольном интервале I, то с точки зрения математически непротиворечивого доказательства, повторяющего рассуждения примера 1 введения, графики функций $y = f(x + A)$ и $y = f(x)$ совпадают при всех х таких, что $x + A \in G, x \in G, A > 0$.

Доказательство.

Доказательство следствия повторяет пример 1 введения с учетом того, что аналитические отображения точек плоскости для уравнений $z = f(p + A)$ и $z = f(p)$ совпадают в случае действительных переменных $x = p, y = z$ с графиками функций $y = f(x + A)$ и $y = f(x)$, (данный факт следует из определения аналитических отображений точек плоскости).

Теорема 2.

Для произвольной функции $z=f(p)$, определенной в некоторой открытой области G, исходное аналитическое многообразие точек плоскости для уравнений $z=f(p), z=g(r)$ имеет два решения уравнения $z=f(p)$ при любом z из области значений функции $z=f(p)$.

Доказательство.

Имеют место одновременно два равенства: $z=f(P+A)=g(r), P=r, z=z_1,$ и $z=f(p)=g(r)$ с одним и тем же $z=z_1$, (как следствие определений функций f,g в любой точке, совпадающей концами радиус векторов p,r. Данные уравнения являются уравнениями одного и того же многообразия как функции переменной $r=P$. Переменную $P=r$ можно считать переменной p, так как эту переменную мы считали переменной p при всех $P=r$ во введении при разборе первого представления примера 2 для функции g, следовательно, она является переменной p любой другой функции вместо g, в том числе для функции f при всех $R=p=P$. (То, что она может считаться переменной p вытекает также из равенства $z=f(P)=g(P-A), P=p,$ по исходному определению функций f,g во введении).

Теорема 2 доказана.

Данное доказательство фактически приводит к равенству $P+A=p$ одновременно с возможностью считать переменную P переобозначением исходной комплексной переменной p для системы координат с центром в точке $(0,0)$,[1; 2; 3; 5].

Список литературы

1. Pavlov A.V. Different coordinate systems and periodicity / A.V. Pavlov // Vol. State Univer. Mathematical Physics and Computer Simulation. 2023. Vol. 26. No. 3. pp. 114–118.

2. Павлов А.В. Отраженные функции и периодичность / А.В. Павлов // International Journal of Open Information Technologies. – 2022. – №6. – С. 33–39. – EDN RREOAZ

3. Павлов А.В. Периодичность для разных систем координат / А.В. Павлов // Вопросы науки и образования: новые подходы и актуальные исследова-

ния: материалы Всерос. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 29 февр. 2024 г.). – Чебоксары: Интерактив плюс, 2024. DOI 10.21661/r-561906. EDN HJUINO

4. Павлов А.В. Принцип неопределенности для разных систем координат / А.В. Павлов // Актуальные направления научных исследований: перспективы развития: материалы Всерос. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 14 март 2024 г.). – Чебоксары: Интерактив плюс, 2024. DOI 10.21661/r-561991. EDN VDVAEY

5. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

6. Чубариков В.Н. Об асимптотических формулах для интеграла И.М. Виноградова / В.Н. Чубариков // Тр. Матем. Инс-та АН СССР. – 1981. – №157. – С. 214 -232.

7. Kolmogorov A.N. The elements of the functions theory and the functional analysis (in Russia) / A.N. Kolmogorov, C.V. Fomin. Moscow: Science, 1976. 544 p.