Смыслина Юлия Сергеевна

магистр, учитель

ГАОУ «Медицинский Сеченовский предуниверсарий Брянской области»

г. Брянск, Брянская область

DOI 10.21661/r-563394

О ПОСТРОЕНИИ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ НА УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРИИ

***Аннотация**: статья посвящена составлению единой схемы построения сечений многогранников и доказательству практической значимости полученной схемы на примере построения сечения пятиугольной призмы.*

***Ключевые слова**: сечения, метод следов, метод внутреннего проектирования, комбинированный метод, пятиугольная призма, параллельность плоскостей.*

При изучении стереометрии в школе важнейшей задачей учителя является не только формирование и развитие у учащихся пространственного воображения, но и научить работать с пространственными объектами. Чтобы знать и понимать стереометрию мало знать теоретические основы, которые представлены в учебной литературе, необходимо так же развивать способность видеть и правильно представлять пространственную фигуру.

Помочь учителю добиться вышеуказанных результатов непосредственно позволяет решение задач на построение сечений многогранников, поэтому решение задач на построение сечений имеет мощный развивающий потенциал.

Проблема заключается в том, что:

– во-первых, в учебной программе отведено недостаточно времени на изучение способов построения сечений;

– во-вторых, в учебниках геометрии для 10 классов выделено недостаточно теоретического материала и задач для отработки навыков построения сечений;

– в-третьих, ни одним автором учебников не предложено конкретного алгоритма действий для учащихся.

Что же такое сечение многогранника в стереометрии? Авторы учебников геометрии 10–11 классов предлагают под сечением понимать часть секущей плоскости, заключенной внутри многогранника. Так как сечение – это часть плоскости, необходимо определить способы задания плоскости:

– три точки, не лежащие на одной прямой;

– прямая и не лежащая на ней точка;

– две пересекающиеся прямые;

– две параллельные прямые.

Существует три метода построения сечений многогранников.

1. Метод следов.

2. Метод внутреннего проектирования.

3. Комбинированный метод построения сечений.

В методе следов предложены правила для построения сечений, но нет алгоритма действий в определенных ситуациях, метод внутреннего проектирования подразумевает построение проекций, что очень тяжело воспринимается учениками, комбинированный метод в свою очередь состоит в применении свойств параллельности прямых и плоскостей, сочетая при этом предыдущие два метода.

Объединим все три метода, создав единую схему построения сечений (схема 1), которую ученик сможет применять к любым задачам.

Для создания схемы, были использованы следующие определения и утверждения стереометрии.

Аксиома 1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость.

Аксиома 3. Если плоскости имеют общую точку, значит имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Свойство 1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости) Прямая перпендикулярна плоскости, тогда и только тогда, когда две пересекающиеся прямые одной плоскости, параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

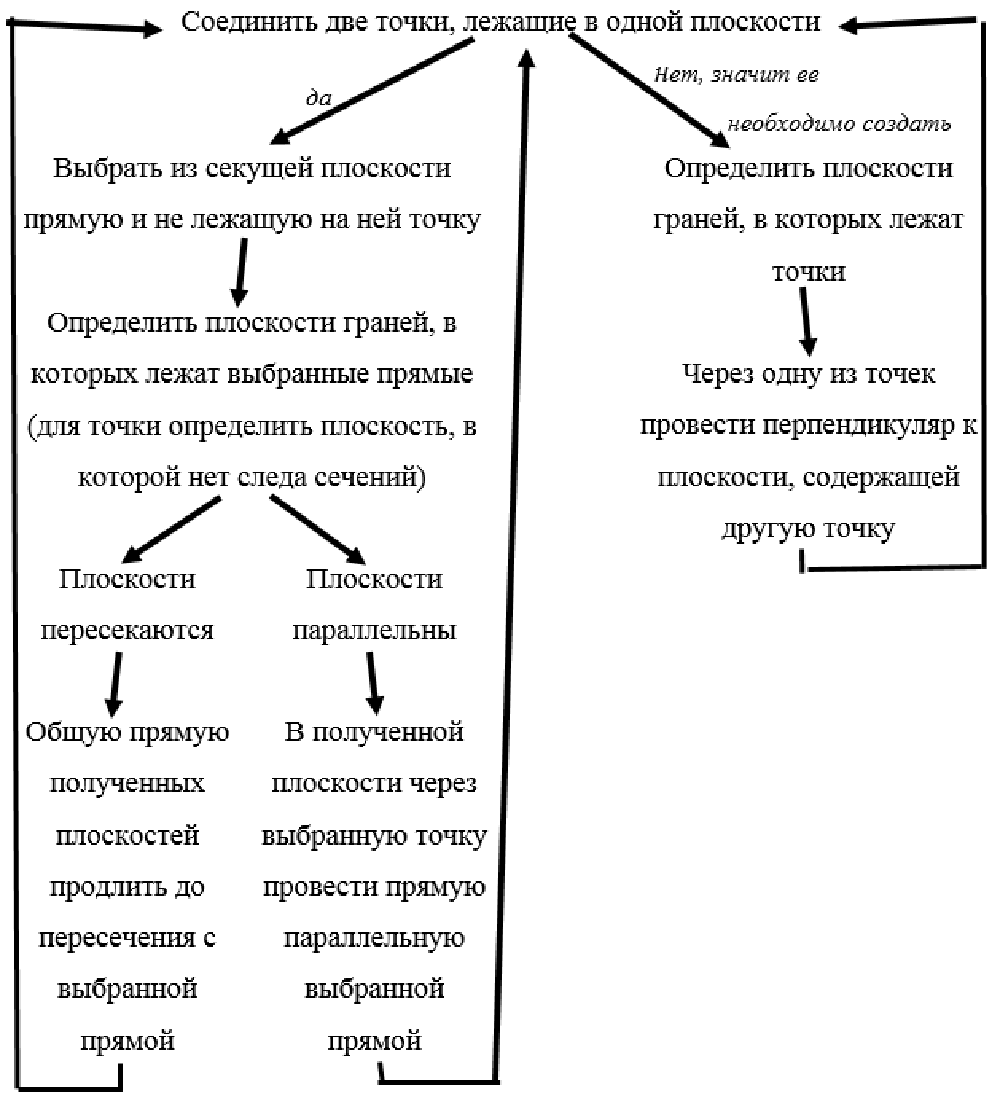

Рис. 1. Единая схема построения сечений многогранников

Докажем практическую значимость, данной схемы на примере построения сечения пятиугольной призмы.

Задача 1. $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ – правильная пятиугольная призма, M – середина AA_1, K – середина ED, N – середина B_1C_1. Постройте сечение призмы плоскостью (MNK).

Соединить две точки, лежащие в одной плоскости, нет возможности, поэтому необходимо создать дополнительную секущую плоскость, в которой найдется пара точек искомой секущей плоскости. Определим плоскости граней, в которых лежат точки секущей плоскости. Точка K лежит в плоскости нижнего основания (ABC), точка N лежит в плоскости верхнего основания ($A_1B_1C_1$), а точка M лежит в плоскости (ABB_1). Проведем через точку N перпендикуляр NT к плоскости нижнего основания (ABC) (см. рис. 1), так как призма правильная, то NT будет параллелен боковым ребрам призмы. Теперь построим дополнительную секущую плоскость, проходящую через прямую NT и точку K, используя схему. Точки T и K принадлежат плоскости нижнего основания, поэтому можем их соединить (см. рис. 2). Выберем прямую TK, которая лежит в плоскости нижнего основания (ABC), и точку N, которая принадлежит плоскости верхнего основания ($A_1B_1C_1$). Данные плоскости параллельны, поэтому проведем в плоскости верхнего основания через точку N прямую NP параллельную прямой TK (см. рис.3). Останется только соединить точки P и K, лежащие в одной плоскости (см. рис. 4). Дополнительная секущая плоскость ($TNPK$) готова.

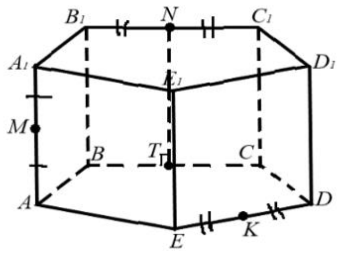

Рис. 1

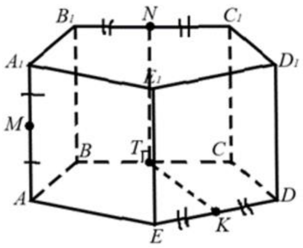

Рис. 2

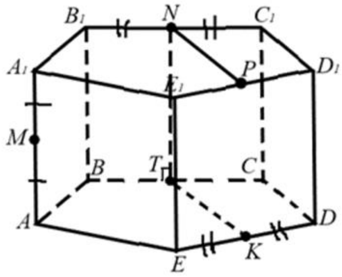

Рис. 3

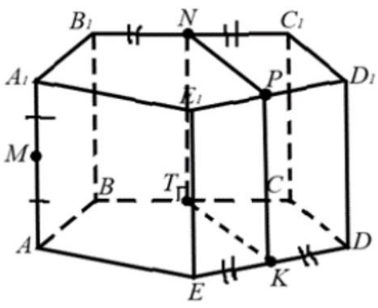

Рис. 4

Теперь точки N и K лежат в одной плоскости дополнительного сечения, поэтому можем их соединить (см. рис. 5). Таким образом можно выбрать прямую NK, которая лежит в плоскости дополнительного сечения (TKP), и точку M, которая принадлежит плоскости (ABB_1), плоскости в которых они лежат пересекаются, поэтому продлим линию их пересечения LF до пересечения с выбранной прямой NK, получим тем самым точку G (см. рис. 6).

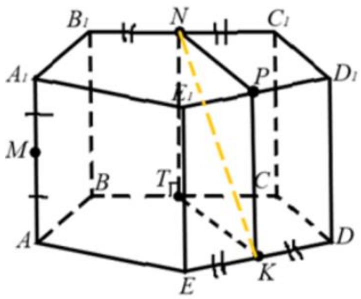

Рис. 5

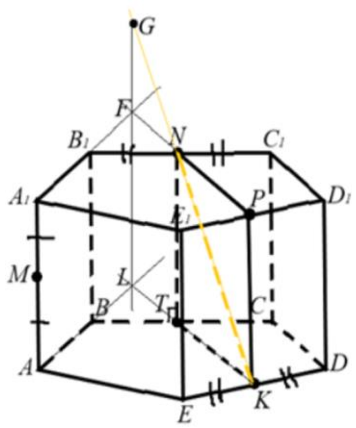

Рис. 6

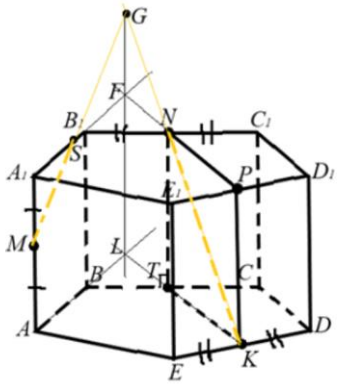

Рис. 7

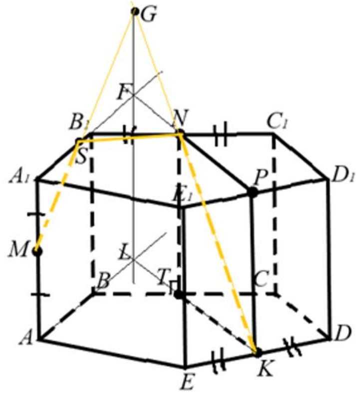

Рис. 8

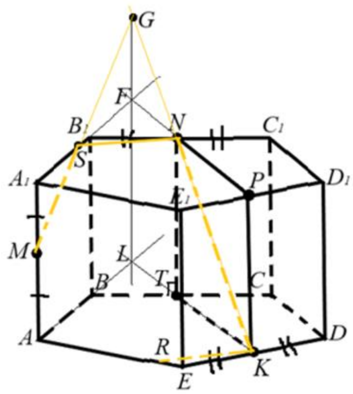

Рис. 9

Теперь мы можем соединить точки G и M, лежащие в одной плоскости, получим тем самым точку искомого сечения S (см. рис. 7), которую можем соединить с точкой N, так как они лежат в одной плоскости (см. рис. 8). Выберем новую прямую SN, лежащую в плоскости верхнего основания ($A_1B_1C_1$), и точку K, принадлежащую плоскости нижнего основания (ABC). Данные плоскости параллельны, поэтому проведем в плоскости нижнего основания через точку K прямую, параллельную выбранной прямой SN, получив тем самым еще одну точку искомого сечения R (см. рис. 9), которую мы можем соединить с точкой M, лежащей с ней в одной плоскости (см. рис. 10). Снова выбираем прямую *SN*, лежащую в плоскости верхнего основания ($A_1B_1C_1$), а для точки *K* теперь определим плоскость (EDD_1). Так как данные плоскости пересекаются, продлим линию их пересечения E_1D_1 до пересечения с выбранной прямой *SN*, получив при этом точку *U* (см. рис. 11).

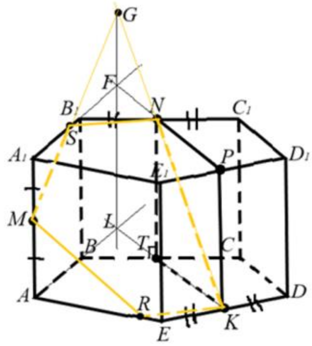

Рис. 10

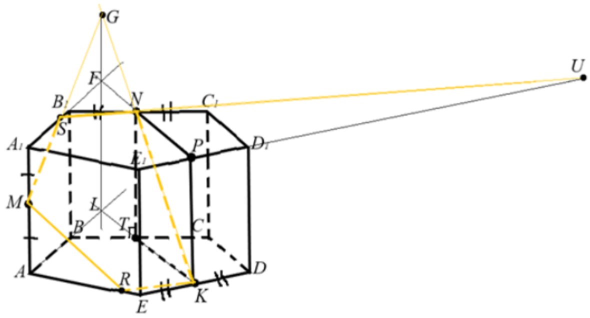

Рис. 11

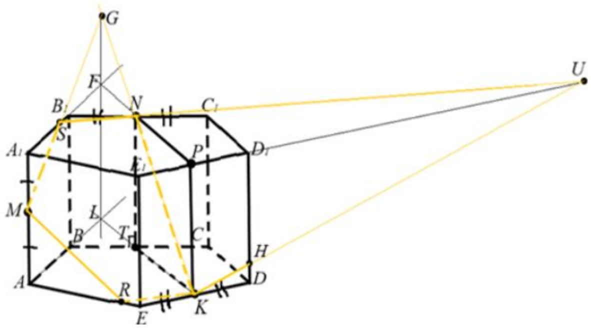

Рис. 12

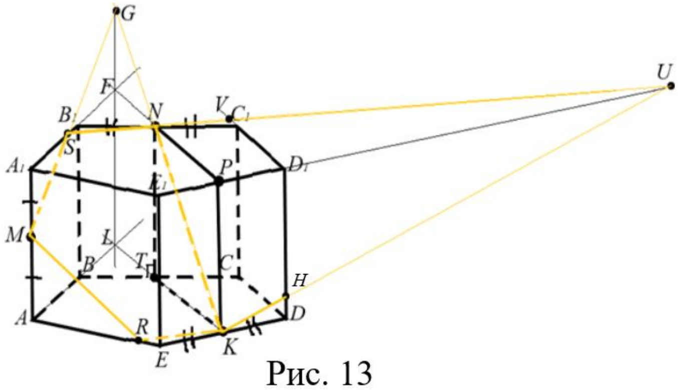

Рис. 13

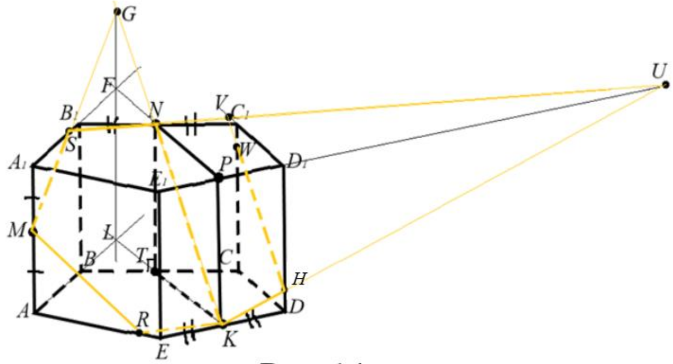

Рис. 14

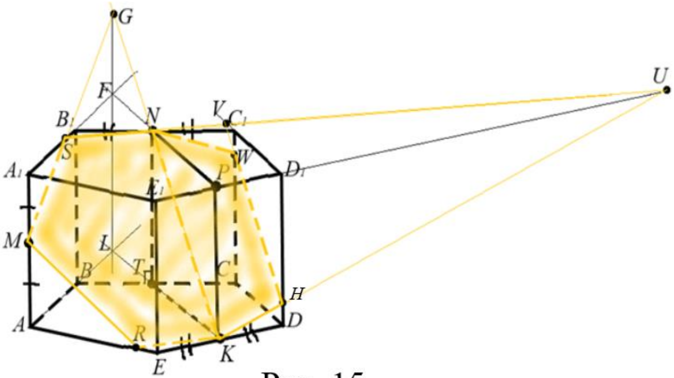

Рис. 15

Теперь можем соединить точки *U* и *K*, лежащие в одной плоскости, получив при этом еще одну точку искомого сечения *H* (см. рис. 12). Снова выберем прямую *SN*, лежащую в плоскости верхнего основания ($A_1B_1C_1$), но точку теперь выберем *H*, которая лежит в плоскости (CDD_1), так как данные плоскости пересекаются, продлим линию их пересечения C_1D_1 до пересечения с выбранной прямой *SN*, получив тем самым точку *V* (см. рис. 13), лежащую с точкой *H* в одной плоскости, поэтому можем их соединить, получив при этом последнюю точку искомого сечения *W* (см. рис. 14), которую останется соединить с точкой *N* (см. рис. 15). Таким образом, следуя полученной схеме, мы построили сечение *MSNWHKR* правильной пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

Данный пример доказывает практическую значимость разработанной схемы построения сечений многогранников.

Список литературы

1. Атанасян Л.С. Геометрия 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Л.С. Атанасян [и др.]. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 2019. – 287 с.

2. Погорелов А.В. Геометрия 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и профил. уровни / А.В. Погорелов. – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 175 с.