Аксенова Ольга Анатольевна
д-р физ.-мат. наук, профессор
Черкасова Елена Викторовна
канд. техн. наук, доцент

ВИ(ВМ) ВУНЦ ВМФ «ВМА»
г. Санкт-Петербург

DOI 10.21661/r-563663

СПЕЦИФИКА ИЗУЧЕНИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ НА ОСНОВЕ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ ЭЛЛИПСА

***Аннотация**: в статье предложены методические рекомендации по выбору материала для примеров и упражнений на практическом занятии по кривым II порядка на примере эллипса со слушателями конкретных специальностей с учетом использования в дальнейшей профессиональной деятельности. Авторами представлены задания для обучающихся.*

***Ключевые слова**: кривые второго порядка, эллипс, фокусное расстояние, эксцентриситет, директрисы, каноническое уравнение.*

Рассмотрим особенности изучения кривых второго порядка в высших учебных заведениях на примере изучения эллипса. Приведем пример методической разработки практического занятия по теме «Кривые второго порядка в декартовой системе координат: эллипс» с рекомендациями для преподавателей и студентов.

Практические занятия проводятся на основе материала, изученного обучающимися в ходе лекций, с целью:

− освоения слушателями учебного материала;

− выработки умений и формирования навыков решения задач на эту тему;

− обучения слушателей выполнению действий, отработки или совершенствования их навыков;

− проверки выполнения умений.

Методическая разработка практического занятия по теме

«*Кривые второго порядка в декартовой системе координат*: *Эллипс*»

Методические рекомендации преподавателям по подготовке

и проведению учебного занятия

1. Преподаватель заранее выдает слушателям:

– тему занятия;

– перечень отрабатываемых на занятии вопросов;

– вопросы для подготовки к письменному (устному) опросу.

2. Рекомендуется также выдать для заполнения таблицу:

	эллипс	гипербола	парабола
График кривой второго порядка			
Каноническое уравнение			
Фокус			
Эксцентриситет			
Уравнения директрис			
Асимптоты			
Геометрическое определение кривой			

3. В начале занятия необходимо провести теоретический опрос по теме занятия (проводится в письменной форме или выборочно в устной).

Уделить особое внимание геометрическому и физическому смыслу кривой второго порядка – эллипса, а также обосновать актуальность темы и ее значение для будущей профессиональной деятельности.

Кривые второго порядка часто встречаются в природе и технике.

Например: орбиты планет, обращающихся вокруг Солнца, имеют форму эллипсов; в картографии при проектировании участков земной поверхности на плоскость возникают искажения, и для характеристики искажающих свойств карты вводится понятие эллипса искажений – бесконечно малого эллипса в каждой точке на карте, являющегося изображением бесконечно малого круга на земной поверхности; в теории стрельбы вводится понятие эллипса рассеивания – кривой, внутри которой рассеиваются точки попадания снарядов, ракет и т. д. при стрельбе на плоскости с вероятностями, пропорциональными полуосям; в кораблевождении вводится понятие эллипса погрешностей – линии, на которой лежат концы случайной векторной погрешности определения места корабля, обладающие одинаковой вероятностью; для моделирования земной поверхности в картографии используется эллипсоид вращения (эллипсоид Красовского), этот же подход используется в астрометрии, одной из главных задач которой является построение теории вращения Земли для рассмотрения движения спутников, измерения времени, гироскопии и т. д. Теория вращения Земли как абсолютно твердого тела предполагает, что Земля – эллипсоид вращения.

Эллипс. Основные теоретические положения

Каноническое уравнение эллипса может быть получено параллельным переносом и поворотом системы координат уравнения а*лгебраической кривой второго порядка*, которая в декартовой системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где коэффициенты A, B, C не равны нулю одновременно.

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами F_1 и F_2, есть величина постоянная, равная $2a$: $\boxed{r_1 + r_2 = 2a}$, где r_1 – расстояние от левого фокуса до любой точки эллипса, r_2 – от правого (рис 1). В декартовой системе координат эллипс определяется каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}, \qquad (1)$$

и имеет форму, изображенную на рис.1.

График эллипса (рис.1) располагается внутри прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$. Отрезки $2a$ и $2b$ – *оси эллипса*, a и b – *его полуоси*.

При этом a – большая полуось, b – малая.
Точки $A_1(a,0)$, $A_2(0,b)$, $A_3(-a,0)$ и $A_4(0,-b)$ – *вершины эллипса.* Центр симметрии $O(0,0)$ – центр эллипса.

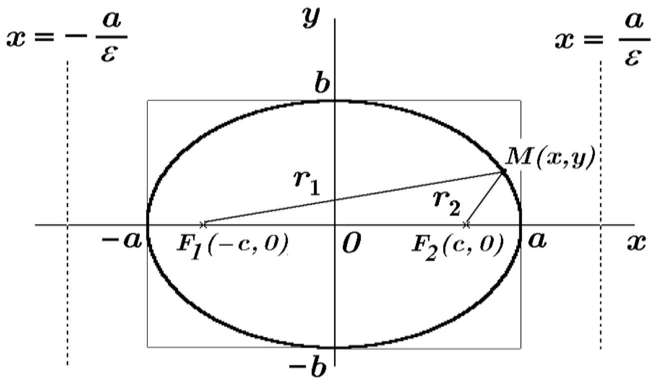


рис. 1

Характеристики эллипса

Фокусы_эллипса – точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}\geq 0$ – *фокусное_расстояние*. *Эксцентриситет_эллипса* – число $\varepsilon=\dfrac{c}{a}, 0<\varepsilon<1.$

Эксцентриситет характеризует форму эллипса: чем больше ε , тем эллипс более вытянут. Если $a=b$, то $\varepsilon=0$ – эллипс переходит в окружность.

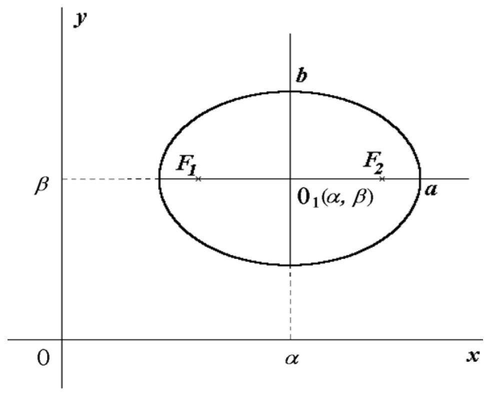
Директрисы_эллипса – прямые, перпендикулярные к большой оси эллипса, расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/ε от него:

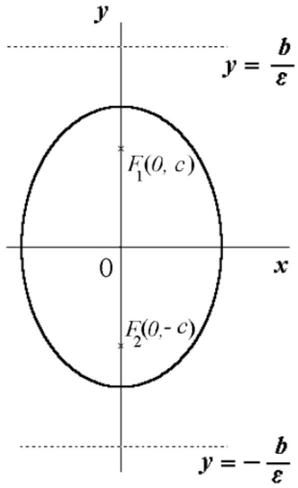
$D_1: x=-\dfrac{a}{\varepsilon}$ – левая директриса, $D_2: x=\dfrac{a}{\varepsilon}$ – правая директриса.

Если центр эллипса находится не в начале координат, а в точке $C(\alpha,\beta)$, оси параллельны осям координат, то уравнение эллипса имеет вид

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1}. \qquad (2)$$

Координаты фокусов и уравнения директрис в данном случае вычисляются по формулам: $F_1(\alpha-c,\beta)$ и $F_2(\alpha+c,\beta)$ – фокусы; директрисы:
$D_1: \quad x-\alpha=-a/\varepsilon$, $D_2: \quad x-\alpha=a/\varepsilon$





Если в уравнении (1) $b > a$, то эллипс вытянут вдоль оси Oy. В этом случае фокусы расположены на оси Oy: $F_1(0,-c)$ и $F_2(0,c)$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$; директрисы перпендикулярны оси Oy: $D_1 : y = -\frac{b}{\varepsilon}$ и $D_2 : y = \frac{b}{\varepsilon}$.

Примеры решения задач

Пример 1. Построить эллипс $4x^2 + 9y^2 = 36$. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис.

Решение. Для построения эллипса нужно знать координаты центра и размеры полуосей *a* и *b*. Для этого приведем исходное уравнение $4x^2 + 9y^2 = 36$ к каноническому виду. Разделим обе части уравнения на 36, чтобы получить единицу справа: $4x^2 + 9y^2 = 36 \;\Big|:36 \Rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

– получили каноническое уравнение эллипса, из которого определяем положение центра и размеры полуосей: $a^2 = 9, \quad b^2 = 4$.

Отсюда $a = 3$ – большая полуось, $b = 2$ – малая полуось.

Центр эллипса – начало координат: (·)O(0,0). Напомним, что график эллипса расположен внутри прямоугольника со сторонами 2*a* и 2*b*.

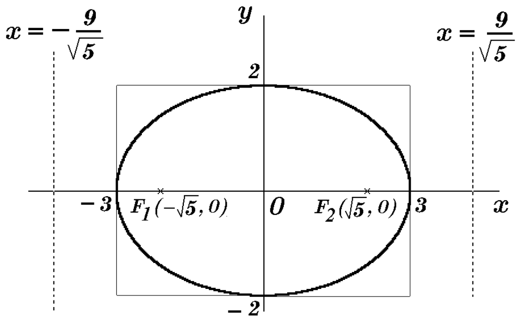


Рис. 2

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} \Rightarrow$ координаты фокусов: $F_1(-\sqrt{5},0)$ и $F_2(\sqrt{5},0)$;

эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

уравнения директрис:

$$D_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{3}{\sqrt{5}/3} = -\frac{9}{\sqrt{5}} \text{ и } D_2 : x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{3}{\sqrt{5}/3} = \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Ответ. $a = 3$, $b = 2$, $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

$$D_1 : x = -\frac{9}{\sqrt{5}},\ D_2 : x = \frac{9}{\sqrt{5}} \text{ (рис. 2).}$$

Пример 2. Написать каноническое уравнение эллипса, если $a = 4$, $c = 3$.

Решение. $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

Ответ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

Пример 3. Определить тип кривой второго порядка, вычислить ее характеристики и построить кривую $9x^2 + 4y^2 + 18x + 16y - 11 = 0$.

Решение. Сгруппируем переменные и выделим полные квадраты по обеим переменным

$$9(x^2 + 2x) + 4(y^2 + 4y) - 11 = 0 \Rightarrow$$

$$9((x^2 + 2x + 1) - 1) + 4((y^2 + 4y + 4) - 4) - 11 = 0 \Rightarrow$$

$$9(x+1)^2 - 9 + 4(y+2)^2 - 16 - 11 = 0 \Rightarrow$$

$$9(x+1)^2 + 4(y+2)^2 = 36 \,|\, : 36 \Rightarrow$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

– каноническое уравнение эллипса со смещенным центром $C(-1, -2)$.

Найдем характеристики эллипса.

$a = 2$, $b = 3$. Так как $b > a$, то эллипс вытянут вдоль оси y и

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

Фокусы расположены на оси y и имеют координаты

$$F_1(-1,\ -2 - \sqrt{5}) \text{ и } F_2(-1,\ -2 + \sqrt{5}).$$

Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Директрисы перпендикулярны оси *y*, их уравнения:

$$D_1 : y + 2 = -\frac{b}{\varepsilon} = -\frac{3}{\sqrt{5}/3},\ y = -2 - \frac{9}{\sqrt{5}}$$

$$D_2 : y + 2 = \frac{b}{\varepsilon} = \frac{3}{\sqrt{5}/3},\ y = -2 + \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

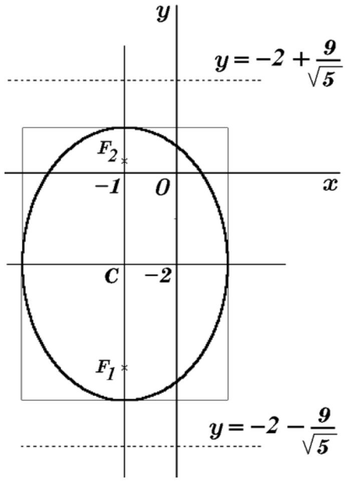


Рис. 3

Ответ. Кривая – эллипс $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ со смещенным центром $C(-1, -2)$, имеет характеристики:

$$a = 2,\ b = 3,\ c = \sqrt{5},\ F_1(-1,\ -2-\sqrt{5}),\ F_2(-1,\ -2+\sqrt{5}),\ \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$D_1 : y = -2 - \frac{9}{\sqrt{5}},\ D_2 : y = -2 + \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Пример 4. Установить, какая линия определяется уравнением $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$. Изобразить эту линию на чертеже.

Решение. Рассмотрим подкоренное выражение $16 + 6x - x^2$. Выделим из него полный квадрат: $16 - (x^2 - 6x + 9 - 9) = 16 - (x-3)^2 + 9 = 25 - (x-3)^2$.

Тогда $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{25 - (x-3)^2}$. Перенесем -7 в левую часть и возведем обе части в квадрат $(y+7)^2 = \frac{4}{25}(25 - (x-3)^2) \quad \Rightarrow$

$$\frac{4}{25}(x-3)^2 + (y+7)^2 = 4 \quad \Big| : 4 \quad \Rightarrow$$

$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+7)^2}{4}=1$- каноническое уравнение эллипса с центром $C(3,-7)$ и полуосями $a=5, b=2$. Так как в исходном уравнении $y+7>0$, то оно определяет часть эллипса, лежащую выше прямой $y=-7$ (рис. 4).

Ответ. Часть эллипса $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+7)^2}{4}=1$, лежащая выше прямой *y* = -7.

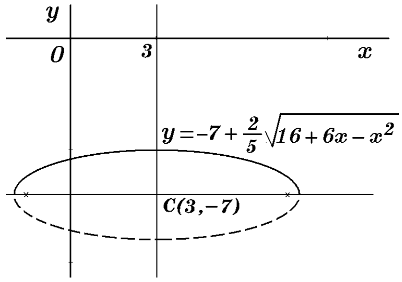
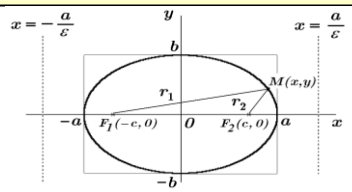


Рис. 4

В итоге занятия каждый студент должен заполнить первый столбец таблицы, выданной в начале изучения темы «Кривые второго порядка».

	эллипс	гипербола	парабола
График кривой второго порядка			
Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *a*>*b*>0		
Фокус	$c^2=a^2-b^2$		
Эксцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$		
Уравнения директрис	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$		
Геометрическое определение кривой	$r_1+r_2=2a$		

Список литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский // Учебник для вузов. – Т. 2. – 7-е изд. – М.: Юрайт, 2023. – С. 178–195.

2. Аксёнова О.А., Черкасова Е.В. Математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / О.А. Аксёнова, Е.В. Черкасова [Электронный

ресурс] – СПб.: Изд-во ВИ(ВМ) ВУНЦ ВМФ «ВМА», 2020. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

3. Аксенова О.А. Высшая математика и ее использование в математическом моделировании / О.А. Аксёнова, Е.Ю. Борисова, О.О. Леонова [и др.] // Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Ч 1. – СПб: МК ПВ – СПб ВМИ, 2010. С. 15–23.