Аксенова Ольга Анатольевна
д-р физ.-мат. наук, профессор
Черкасова Елена Викторовна
канд. техн. наук, доцент

ВИ(ВМ) ВУНЦ ВМФ «ВМА»
г. Санкт-Петербург

DOI 10.21661/r-563664

ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ НА ПРИМЕРЕ ГИПЕРБОЛЫ

***Аннотация**: в статье рассмотрена методическая разработка практического занятия по теме «Кривые второго порядка в декартовой системе координат: гипербола». Авторами статьи даны методические рекомендации для преподавателей и студентов.*

***Ключевые слова**: гипербола, график гиперболы, основной прямоугольник, оси гиперболы, полуоси, вершины гиперболы, центр симметрии, фокусы, эксцентриситет, директрисы, асимптоты.*

Рассмотрим особенности изучения кривых второго порядка в высших учебных заведениях на примере изучения гиперболы. Приведем пример методической разработки практического занятия по теме «Кривые второго порядка в декартовой системе координат: гипербола» с методическими рекомендациями для преподавателей и студентов.

Практические занятия проводятся на основе материала, изученного обучающимися в ходе лекций, с целью:

– освоения слушателями учебного материала;

– выработки умений и формирования навыков решения задач на эту тему;

– обучения слушателей выполнению действий, отработки или совершенствования их навыков;

– проверки выполнения умений.

Методическая разработка практического занятия по теме

«*Кривые второго порядка в декартовой системе координат*: *гипербола*»

Методические рекомендации преподавателям

по подготовке и проведению учебного занятия

1. Преподаватель заранее выдает слушателям:

– тему занятия,

– перечень отрабатываемых на занятии вопросов,

– номера разобранных примеров и основных формул,

– вопросы для подготовки к письменному (устному) опросу.

2. Рекомендуется также выдать для заполнения таблицу:

	эллипс	*гипербола*	парабола
График кривой второго порядка			
Каноническое уравнение			
Фокус			
Эксцентриситет			
Уравнения директрис			
Асимптоты			
Геометрическое определение кривой			
Фокальные радиусы			
Общее свойство кривых II порядка			

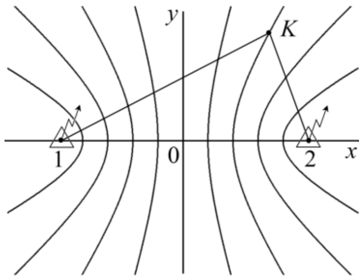
3. В начале занятия провести теоретический опрос по теме занятия (проводится в письменной форме или выборочно в устной).

Уделить особое внимание геометрическому и физическому смыслу кривой второго порядка – гиперболы, а также обосновать актуальность темы и ее значение для будущей профессиональной деятельности.

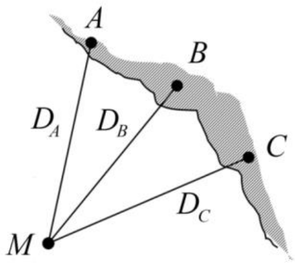
Например, *гипербола* является графиком многих важных физических соотношений, в частности, закона Бойля (связывающего давление и объем идеального газа) и закона Ома, задающего электрический ток как функцию сопротивления при постоянном напряжении.

Свойства гиперболы как кривой, для всех точек которой разность расстояний до двух данных точек (фокусов) постоянна, положено в основу импульсного метода измерения разности расстояний (рис. а).

Пусть t_1 и t_2 - время прохождения сигнала от источников 1 и 2 до точки *К* соответственно. Тогда для всех точек *К*, лежащих на гиперболе, имеем $\Delta t = |t_1 - t_2|$. Располагая тремя радиолокационными станциями A, B, C и измеряя разности расстояний $D_A - D_B$ и $D_C - D_B$, можно определить место объекта *М* как точку пересечения двух гипербол: одной с фокусами в точках A и B, другой – с фокусами в точках B, C (рис. б).



а)



б)

Рис. 1

4. Решение задач с вызовом студентов к доске

Пример 1. Построить гиперболу $9x^2 - 4y^2 = 36$. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис, уравнения асимптот.

Пример 2. Написать каноническое уравнение гиперболы, если

$$\text{а) } b = 4, c = 5; \text{ б) } c = 3, \ \varepsilon = \frac{3}{2}.$$

Пример 3. Определить тип кривой второго порядка, вычислить ее характеристики и построить кривую: $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

Пример 4. Установить, какая линия определяется уравнением

$y = -1 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5}$. Изобразить эту линию на чертеже.

5. Сделать выводы по занятию и дать задание на самостоятельную подготовку к следующему практическому занятию.

Решить задачи:

Задача 1. Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и асимптот.

Задача 2. Написать каноническое уравнение гиперболы, если $a = 8,\ \varepsilon = \dfrac{5}{4}$

Задача 3. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти ее центр, полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис и асимптот:

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ *б*) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$.

Задача 4. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями. Изобразить эти линии на чертеже:

$$а)\ y = \frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25};\ б)\ x = 9 - 2\sqrt{8 + 4y + y^2}.$$

Методические рекомендации студентам по подготовке к учебному занятию

1. Изучить учебный материал по теме занятия в рекомендованной литературе и по своему конспекту лекций.

2. Подготовиться к письменному теоретическому опросу. Для чего повторить следующие вопросы:

– каноническое уравнение гиперболы;

– построение графика гиперболы: оси, полуоси, основной прямоугольник, вершины гиперболы, центр гиперболы;

– характеристики гиперболы: координаты фокуса, эксцентриситет; уравнения директрис, уравнения асимптот.

Основные теоретические положения

Каноническое уравнение гиперболы может быть получено параллельным переносом и поворотом системы координат уравнения *алгебраической кривой второго порядка,* которая в декартовой системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где коэффициенты A, B, C не равны нулю одновременно.

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами F_1 и F_2, – величина постоянная, равная $2a$

$$\boxed{|r_1 - r_2| = 2a},$$

где r_1 – расстояние от левого фокуса до любой точки гиперболы, r_2 – от правого (рис 1).

В декартовой системе координат гипербола определяется каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}, \qquad (1)$$

и имеет форму, изображенную на рис. 1.

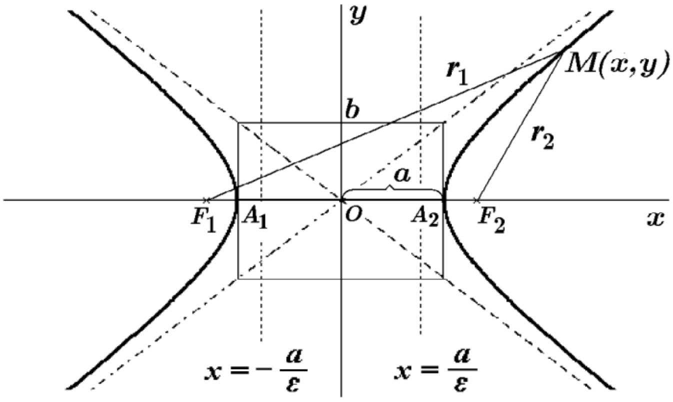


Рис. 1

График гиперболы располагается вне основного прямоугольника.

Основным прямоугольником гиперболы называется прямоугольник, симметричный относительно центра гиперболы, со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными осям координат. Отрезки $2a$ и $2b$ – *оси гиперболы*, a и b – *её полуоси*. При этом a – вещественная полуось, b – мнимая.

Точки $A_1(-a,0), A_2(a,0)$ – *вершины_гиперболы*. Центр симметрии $O(0,0)$ – *центр гиперболы*.

Рассмотрим *характеристики гиперболы* (рис. 1).

Точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, где $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, называются *фокусами* гиперболы.

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ – *эксцентриситет* гиперболы. Эксцентриситет характеризует форму основного прямоугольника гиперболы, а значит, и форму гиперболы: чем меньше ε, тем больше вытянут ее прямоугольник.

Директрисы_гиперболы – прямые, перпендикулярные к вещественной оси гиперболы, расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\dfrac{a}{\varepsilon}$ от него:

$$D_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ – левая директриса; } D_2 : x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ – правая директриса.}$$

Асимптоты_гиперболы – прямые $y = \dfrac{b}{a}x$ и $y = -\dfrac{b}{a}x$ (диагонали основного прямоугольника).

Замечания.

1. Если центр гиперболы находится не в начале координат, а в точке $C(\alpha, \beta)$, оси параллельны осям координат, то уравнение гиперболы имеет вид: $\boxed{\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.}$

Координаты фокусов, уравнения директрис и асимптот в этом случае вычисляются по формулам:

$F_1(\alpha - c, \beta)$ и $F_2(\alpha + c, \beta)$ – фокусы;

$D_1 : x - \alpha = -\dfrac{a}{\varepsilon}$, $D_2 : x - \alpha = \dfrac{a}{\varepsilon}$ – директрисы;

$y - \beta = \pm\dfrac{b}{a}(x - \alpha)$ – асимптоты гиперболы.

2. Уравнение $\boxed{-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ определяет *сопряжённую* гиперболу

С действительной осью Oy (рис.2), с фокусами на оси ординат (повернута на 90° относительно гиперболы, заданной уравнением (1)).

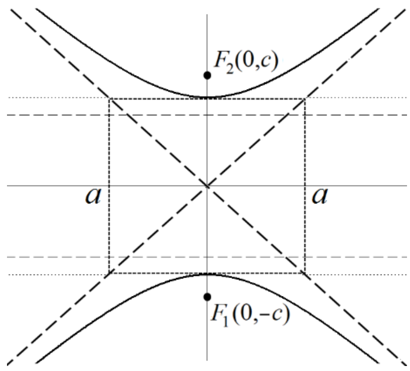


Рис. 2

Формулы для вычисления координат фокусов, уравнения директрис и асимптот: $F_1(0,-c)$ и $F_2(0,c)$ – фокусы;

$$D_1: y = -\frac{b}{\varepsilon},\ D_2: y = \frac{b}{\varepsilon} \text{ – директрисы;}$$

$$x = \pm\frac{a}{b}y \text{ – асимптоты гиперболы.}$$

Примеры решения задач

Пример 1. Построить гиперболу $9x^2 - 4y^2 = 36$. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис, уравнения асимптот. *Решение*. Приведем исходное уравнение к каноническому виду:

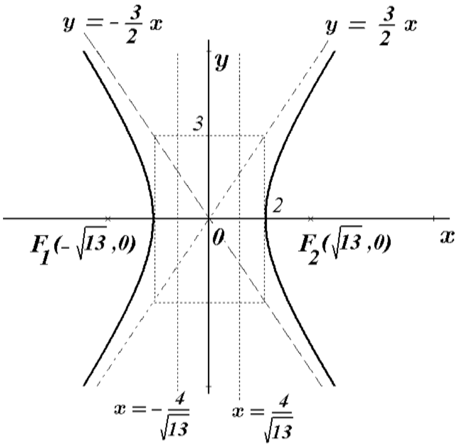


Рис. 3

$$9x^2 - 4y^2 = 36 \,|: 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a^2 = 4, b^2 = 9.$$

Отсюда $a = 2$ – действительная полуось, $b = 3$ – мнимая полуось; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \Rightarrow$ координаты фокусов $F_1(-\sqrt{13},0)$ и $F_2(\sqrt{13},0)$;

эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$;

уравнения директрис

$$D_1: x = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{2}{\sqrt{13}/2} = -\frac{4}{\sqrt{13}} \text{ и } D_2: x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{13}/2} = \frac{4}{\sqrt{13}};$$

уравнения асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3}{2}x$.

Ответ. $a = 2$, $b = 3$; $c = \sqrt{13}$; $F_1(-\sqrt{13}, 0)$ и $F_2(\sqrt{13}, 0)$; $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$;

$$D_1: x = -\frac{4}{\sqrt{13}} \text{ и } D_2: x = \frac{4}{\sqrt{13}};\ y = \pm\frac{3}{2}x \text{ (рис. 3).}$$

Пример 2. Написать каноническое уравнение гиперболы, если

а) $b = 4$, $c = 5$; б) $c = 3$, $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

Решение. а) $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

б) $\varepsilon^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1\text{-}\varepsilon^2$;

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \frac{9}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{9}{a^2} = \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{9}{4} \Rightarrow a^2 = 4;$$

$$b^2 = c^2\text{-}a^2 \Rightarrow b^2 = 5 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{4}\text{-}\frac{y^2}{5} = 1.$$

Ответ. а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; б) $\frac{x^2}{4}\text{-}\frac{y^2}{5} = 1$.

Пример 3. Определить тип кривой второго порядка, вычислить ее характеристики и построить кривую: $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

Решение. Сгруппируем переменные и выделим полные квадраты по обоим переменным

$$16(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 2y) + 199 = 0 \Rightarrow$$

$$16((x^2 - 4x + 4) - 4) - 9((y^2 + 2y + 1) - 1) + 199 = 0 \Rightarrow$$

$$16(x-2)^2 - 64 - 9(y+1)^2 + 9 + 199 = 0 \Rightarrow$$

$$16(x-2)^2-9(y+1)^2=-144 \Rightarrow -\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$$

– каноническое уравнение гиперболы со смещенным центром $C(2,-1)$, фокусы которой лежат на оси Oy.

В силу этого $b^2=16 \Rightarrow b=4;\ a^2=9 \Rightarrow a=3$;

$$c=\sqrt{b^2+a^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

Фокусы расположены по оси y и имеют координаты

$F_1(2,-1-5)=F_1(2,-6)$ и $F_2(2,-1+5)=F_2=(2,4)$. Эксцентриситет

$$\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{5}{4}.$$

Директрисы перпендикулярны оси y, их уравнения:

$$D_1: y+1=-\frac{4}{5/4},\ y=-\frac{16}{5}-1=-4{,}2,$$

$$D_2: y+1=\frac{4}{5/4},\ y=-1+\frac{16}{5}=2{,}2.$$

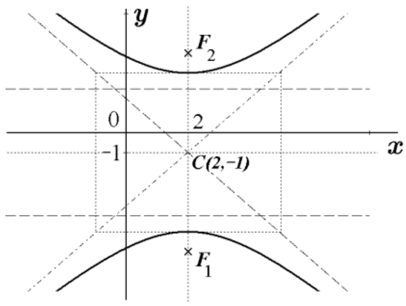


Рис. 4

Асимптоты определяются уравнениями

$$(x-2)=\pm\frac{3}{4}(y+1) \text{ или}$$

$$4x-3y-11=0 \text{ и } 4x+3y-5=0.$$

Ответ. Кривая – гипербола: $-\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$ с характеристиками

$b=4,\ a=3,\ c=5$; $F_1(2,-6)$, $F_2=(2,4)$; $\varepsilon=\frac{5}{4}$; $D_1: y=-4{,}2$, $D_2: y=2{,}2$;

$4x-3y-11=0$, $4x+3y-5=0$ (рис. 4).

Пример 4. Установить, какая линия определяется уравнением $y=-1-\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$. Изобразить эту линию на чертеже.

Решение. Рассмотрим подкоренное выражение x^2-4x-5. Выделим полный квадрат:

$$(x^2-4x+4-4)-5=(x-2)^2-9$$

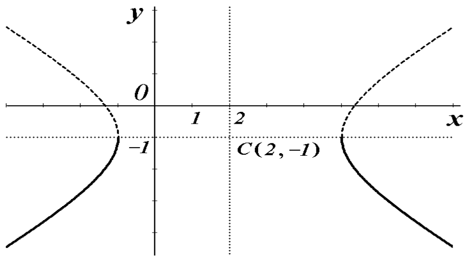


Рис. 5

Тогда $y=-1-\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^2-9}$. Перенесем – 1 в левую часть и возведем обе части в квадрат

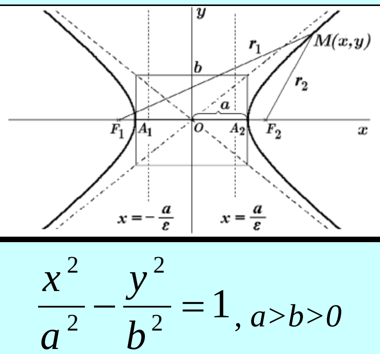
$$(y+1)^2=\frac{4}{9}((x-2)^2-9)\Rightarrow -\frac{4}{9}(x-2)^2+(y+1)^2=-4\,\big|:-4\Rightarrow$$

$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$ – каноническое уравнение гиперболы с центром $C(2,-1)$ и полуосями $a=3, b=2$.

Так как в исходном уравнении $y+1<0$, то оно определяет часть гиперболы, лежащую ниже прямой $y=-1$ (рис. 5).

Ответ. Часть гиперболы $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$, лежащая ниже прямой $y=-1$ (рис. 5).

В итоге практического занятия каждый студент должен заполнить второй столбец таблицы, выданной в начале изучения кривых второго порядка:

	эллипс	*гипербола*	парабола
График кривой второго порядка			
Каноническое уравнение		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b>0$	
Фокус		$c^2=a^2+b^2$	
Эксцентриситет		$\varepsilon=\frac{c}{a}>1$	

Уравнения директрис		$x = \pm \dfrac{a}{\varepsilon}$	
Асимптоты		$y = \pm \dfrac{b}{a} x$	
Геометрическое определение кривой		$\lvert r_1 - r_2 \rvert = 2a$	
Фокальные радиусы		$\begin{cases} r_1 = \varepsilon\, x - a \\ r_2 = \varepsilon\, x + a \end{cases}$	

Список литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский // Учебник для вузов. – Т. 2. – 7-е изд. – М.: Юрайт, 2023. – С. 178–195.

2. Аксёнова О.А., Черкасова Е.В. Математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / О.А. Аксёнова, Е.В. Черкасова [Электронный ресурс] – СПб.: Изд-во ВИ(ВМ) ВУНЦ ВМФ «ВМА», 2020. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

3. Аксенова О.А., Борисова Е.Ю., Леонова О.О., Черкасова Е.В. Высшая математика и ее использование в математическом моделировании / О.А. Аксенова, Е.Ю. Борисова, О.О. Леонова [и др.] // Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Ч. 1. – СПб: МК ПВ – СПб ВМИ, 2010. – С. 15–23.