

Алиева Химисай Магомедганифаевна

учитель

ГБОУ «Республиканский физико-
математический лицей-интернат»

г. Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания

ИССЛЕДОВАНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация: в статье рассматривается исследование различных способов решения квадратных уравнений. Автором отмечено последовательное выполнение нескольких этапов при решении задач с квадратным уравнением.

Ключевые слова: квадратные уравнения, параметры квадратного уравнения, дискриминант.

Вначале дадим определение квадратного уравнения: квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a , b и c – коэффициенты, а x – переменная. Уравнения такого типа не только формируют базу для изучения алгебры, но и служат связующим звеном между различными разделами математики, такими как аналитическая геометрия и математический анализ.

Квадратные уравнения практически применяются в других науках, включая физику, астрономию, информатику, инженериию и экономику. Например, они используются для моделирования параболических траекторий в классической и небесной механике, расчетов в финансовых задачах, а также в биологии для описания роста популяций, в строительстве и архитектуре. Поэтому каждому обучающемуся необходимо не только уметь решать квадратные уравнения, т.е. находить корни, но и понимать их значение в реальном мире. Так без знания формул корней квадратного уравнения, дискриминанта обучающие вряд ли смогут достигнуть цели при решении алгебраических задач. Однако, не стоит забывать, что существуют и другие методы решения, которые могут быть более эффективными в определенных условиях. Данные методы не только ускоряют процесс решения, но и развивают аналитическое мышление обучающихся, что важно для их дальнейшего обучения.

Целью данного исследования является исследование различных способов решения квадратных уравнений. Исходя из этого можно разбить материал на несколько видов и способов решения квадратных уравнений:

1. Исследование решений квадратных уравнений, зависящих от параметров;
2. Нахождение решений квадратных уравнений по дополнительным условиям;
3. Исследование решений задач на составление квадратных уравнений.

Рассмотрим первый метод.

1. Исследование решений квадратных уравнений, зависящих от параметров.

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ могут быть:

- вещественные и разные, если дискриминант $b^2 - 4ac > 0$;
- вещественные и равные (кратные), если $b^2 - 4ac = 0$;
- мнимые, если $b^2 - 4ac < 0$.

Если известно, что, $a > 0$, тогда знаки вещественных корней можно определить по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Не стоит забывать про другие случаи:

- оба корня положительные, если

$$-\begin{cases} \frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}, \text{отсюда} \begin{cases} b < 0; \\ c > 0; \end{cases}$$

- оба корня имеют отрицательные знаки, если $\begin{cases} b > 0; \\ c > 0; \end{cases}$

– корни имеют разные знаки, при этом положительный корень больше по абсолютной величине, если

$$\begin{cases} b < 0; \\ c < 0; \end{cases}$$

– корни имеют разные знаки, причём отрицательный корень будет большим по абсолютной величине, если

$$\begin{cases} b > 0; \\ c < 0; \end{cases}$$

– корни имеют разные знаки, причём абсолютные величины корней равны между собой, если

$$\begin{cases} b = 0, \\ c < 0; \end{cases}$$

Получаем неполное квадратное уравнение вида: $ax^2 + c = 0$;

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}; x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Один из корней равен нулю, если

$$\begin{cases} b \neq 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Имеем неполное квадратное уравнение

$$ax^2 + bx = 0; x(ax + b) = 0;$$

$$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Таким образом, если один из корней равен нулю, то свободный член равен нулю.

Оба корня равны нулю, если $\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$; получаем неполное квадратное уравнение

$$ax^2 = 0; x_1 = x_2 = 0.$$

Таким образом, если оба корня равны нулю, то коэффициент неизвестного в первой степени и свободный член равны нулю.

Во всех рассмотренных случаях предполагалось, что

$$a \neq 0 (a > 0)$$

При решении некоторых задач для полноты исследования желательно учитывать следующие случаи:

$$a = b = c = 0,$$

в данном случае уравнение принимает вид: $0x^2 + 0x + 0 = 0$, т.е. уравнение превращается в тождество.

$$a \rightarrow 0,$$

если один из корней неограниченно возрастает по абсолютной величине. Для доказательства примем $x = \frac{1}{y}$; мы получим уравнение

$$cy^2 + by + a = 0 \quad (1)$$

Если $|x|$ неограниченно возрастает, то из $x = \frac{1}{y}$; заключаем, что y стремится к нулю; поэтому, свободный член уравнения (1) должен стремиться к нулю.

$$a \rightarrow 0 \text{ и } b \rightarrow 0,$$

если оба корня неограниченно возрастают по абсолютной величине. Можно доказать это аналогично предыдущему.

Пример 1. При каких значениях m корни уравнения $(1 + m)x^2 - 2x + m - 2 = 0$ будут положительными?

Решение. Дискриминант равен $4(3 + m - m^2)$; корни будут вещественные, если

$$\frac{1 - \sqrt{13}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \quad (1)$$

Для положительности корней необходимо, чтобы

$$\begin{cases} \frac{2}{m+1} > 0, \\ \frac{m-2}{m+1} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} m+1 > 0 \\ m-2 > 0 \end{cases}; \quad m > 2. \quad (2)$$

Сопоставляя (1) и (2), находим:

$$2 < m \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

2. Нахождение решений квадратных уравнений по дополнительным условиям.

Из свойств квадратного трёхчлена следует, что если число m заключено между корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то численная величина трёхчлена $ax^2 + bx + c$ ($a > 0$), при $x = m$ есть величина отрицательная, т. е. $am^2 + bm + c < 0$.

Обратное положение также имеет место.

1) Если оба корня меньше m , то численная величина трёхчлена при $x = m$ будет положительная, и, кроме того, m больше среднего арифметического корней, т. е. $m > -\frac{b}{2a}$, так как, складывая $x^1 < m$ и $x^2 < m$, находим $\frac{x_1 + x_2}{2} < m$; $m > -\frac{b}{2a}$

2) Если оба корня уравнения больше числа m , то численная величина трёхчлена $ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) при $x = m$ — есть величина положительная, и, кроме того, m меньше среднего арифметического корней, т. е. $m < -\frac{b}{2a}$.

Пример 2. При каких значениях m корни уравнения $x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ будут оба больше 1 и меньше 4?

Решение. Корни вещественные, если

$$m \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ или } m \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Далее, найдем

$$\begin{cases} 1 - 2m + m + 1 > 0 \\ m > 1 \\ 16 - 8m + m + 1 > 0 \\ m < 4 \end{cases} \begin{cases} m < 2 \\ m > 1 \\ m < 2\frac{3}{7} \\ m < 4 \end{cases}$$

Сопоставляя все границы, получим

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \leq m < 2$$

3. Исследование решений задач на составление квадратных уравнений.

Решение задач на составление квадратных уравнений – это глубокий аналитический процесс, требующий тщательного изучения условий задачи и понимания полученного решения. Успешное решение таких задач предполагает последовательное выполнение нескольких этапов. Рассмотрим их более подробно.

Первый этап – анализ условий задачи. Необходимо не только определить известные величины (включая их числовые значения, единицы измерений, ограничения – например, должны ли быть числа положительными, отрицательными, целыми и дробными), но и выявить взаимосвязь между ними. Данный аспект часто упускается из виду.

Например, в задаче о движении важно учесть зависимость между временем, скоростью и расстоянием, также ограничения – скорость не может быть отрицательной, расстояние не может быть нулевым или меньше нуля.

Второй этап включает в себя четкое определение неизвестной величины и установление ее допустимого интервала значений. Часто условие задачи накладывает ограничения на возможные значения неизвестного. Например, если неизвестная величина представляет собой длину отрезка, то она обязательно должна быть

положительной. Если неизвестная – это количество предметов, то она должна быть целым неотрицательным числом. Необходимо четко сформулировать эти ограничения чтобы в дальнейшем отсеивать ненужные и неподходящие решения.

Третий этап – это исследование дискриминанта полученного квадратного уравнения. Знак дискриминанта указывает на количество и характер корней уравнения. Если дискриминант положительный, то уравнение имеет два различных действительных корня. Если дискриминант равен нулю, то уравнение имеет один действительный корень.

Четвертый и наиболее важный этап – это анализ полученных решений и выбор того, которое наиболее полно удовлетворяет всем условиям задачи. Это может включать проверку решения путем подстановки в исходное уравнение или проверку на соответствие физическому смыслу задачи.

Важно: квадратное уравнение может иметь два решения, но только одно из них может быть правильным ответом на поставленный вопрос.

Задача 1. Путь длиной a километров трамвай проходит с определенной скоростью, при увеличении которой на b км / ч потребуется меньше времени для прохождения всего пути. Сколько времени трамвай преодолевает весь путь и какова его скорость?

Решение. Имеем уравнение:

$$\frac{a}{x} - \frac{a}{x+b} = c,$$

где x есть скорость трамвая.

После преобразований получим

$$cx^2 - bcx - ab = 0$$

$$x_1 = \frac{-bc + \sqrt{b^2c^2 + 4abc}}{2c} \quad x_2 = \frac{-bc - \sqrt{b^2c^2 + 4abc}}{2c}$$

Поскольку по идее самой задачи величины a, b, c являются положительными, то дискриминант $b^2c^2 + 4abc > 0$, следовательно, корни этой проблемы реальны и различны, для определения признаков которой мы используем теорему Виета:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{ab}{c} < 0,$$

следовательно, корни имеют разные знаки; очевидно, что $x_2 < 0$; значит, $x_1 > 0$. Искомое значение x по своему смыслу должно быть положительным, поэтому только x_1 :

Таким образом, трамвай двигался со скоростью

$$\frac{\sqrt{b^2c^2+4abc}-bc}{2c} \text{ км/час}$$

Время, затраченное им, равно a

$$\frac{\sqrt{b^2c^2+4abc}-bc}{2c} = \frac{\sqrt{b^2c^2+4abc}+bc}{2b} \text{ часов}$$

Заметим, что неравенство $x_1 > 0$ можно доказать ещё следующим образом: ввиду того, что a, b, c числа положительные, то

$$\sqrt{b^2c^2 + 4abc} > \sqrt{b^2c^2}; \quad \sqrt{b^2c^2 + 4abc} > bc; \quad x_1 > 0.$$

Можно поступить и так:

$$\frac{\sqrt{b^2c^2+4abc}-bc}{2c} > 0; \quad \sqrt{b^2c^2 + 4abc} > bc;$$

$$b^2c^2 + 4abc > b^2c^2; \quad 4abc > 0,$$

пришли к очевидному неравенству.

Тщательно изучив квадратное уравнение и его параметры, можно найти оптимальный вариант, при котором получим наиболее красивое и рациональное решение.

Список литературы

1. Макарычев Ю.Н. Алгебра: учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков [и др.]. – 11-е изд. – М.: Просвещение, 2023. – 238 с. – ISBN 5-09-011880-9.
2. Гусев В.А. Математика: справочные материалы. Книга для учащихся / В.А. Гусев, А.Г. Мордкович. – М.: Просвещение, 2020.
3. Глейзер Г.И. История математики в школе / Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 2022.
4. Дорофеев Г.В. Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. 8 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.В. Дорофеев [и др.]. – М.: Дрофа, 2022.

5. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс: в двух частях. Ч.1. Учебник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 4-е изд. – М.: Мнемозина, 2023. – 223 с. – ISBN 5-346-00148-4.

6. Окунев А.К. Квадратичные функции, уравнения и неравенства: пособие для учителя / А.К. Окунев. – М.: Просвещение, 2022.

7. Энциклопедический словарь юного математика для среднего и старшего возраста. – 2-е изд. – М.: Педагогика, 2019. – 132 с.

8. Алиева Х.М. Учебное пособие для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ «Исследование квадратных уравнений» (9–11 классы) / Х.М. Алиева [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://infourok.ru/uchebnoe-posobie-dlya-podgotovki-k-oge-i-ege-issledovanie-kvadratnyh-uravnenij-9-11-klassy-5280293.html> (дата обращения: 09.04.2025).