Обласова Ирина Николаевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Тимофеева Елена Федоровна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Ширяева Наталья Васильевна
канд. психол. наук, доцент

ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»
г. Ставрополь, Ставропольский край

ОПИСАНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ КОНТУРОВ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ УПРУГОЙ СЕТИ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ХИКСА

Аннотация: *в работе разработан подход, основанный на описании сетеподобной системы математической моделью с опорой на понятие функции влияния. С этой целью показано главное свойство функции влияния – способность определять реальное состояние объекта в интегральном виде.*

Ключевые слова: *функция влияния, бифуркационные состояния, моделирование процессов, построение краевых задач, принцип Хикса.*

Основной целью исследования проблемы моделирования функции влияния упругой сети – это поиск более эффективных методов доказательства адекватности уже известных моделей и расширение классов моделируемых объектов, для которых традиционные способы не позволяют описать даже отдельных фрагментов, а внешние влияния оказываются ни причем.

Цель исследования обуславливала не только математическую постановку задачи, но и математическое описание физической модели изучаемого объекта [4, с. 48].

В нашем исследовании изучался объект, который может служить математической моделью для весьма разнообразных классов реальных физических систем, объединенных одним общим свойством. Каждая такая система определяется конечным набором одномерных фрагментов, так или иначе взаимодействующих друг с другом. Это может быть электрическая или информационная сеть, или система акустических труб, или система газо- или нефтепроводов, или система упругих тросов (математических струн) и многое другое. Подобные объекты вошли в математику не так давно, поэтому для определенности мы пользовались следующей терминологией

Геометрическим графом (пространственной сетью), называется совокупность ребер – открытых интервалов $\gamma_i = (a_i, a_i')$ из R^n вида

$$\gamma_i = (a_i, a_i') \ = \ \{x : x = a_i + \lambda(a_i' - a_i), 0 \prec \lambda \prec 1\},$$

точки a_i и a_i' естественно называть концами γ_i [2, с. 126].

Некоторое множество А таких концов объединяем с множеством всех точек $\bigcup_i (a_i, a_i')$, обозначили это объединение через Г. Точки $a \in A$, являющиеся концами объединяемых интервалов, называли внутренними вершинами, если такие точки оказываются общими для двух интервалов. Такие вершины называли узлами. Их множество обозначили через J(Г). Разные интервалы γ_i и γ_k по определению не пересекаются и могут только смыкаться в общих узлах. Объединение $\cup \gamma_i$ всех ребер мы обозначили через R(Г). Таким образом, Г=$R(\Gamma) \cup J(\Gamma)$.

Наряду с внутренними вершинами, т.е. узлами из J(Г), нам необходимо было выделить остальные концы – вершины интервалов γ_i из R(Г), которые не вошли в Г. Мы назвали эти вершины граничными, а их множество обозначили через $\partial\Gamma$

Рассматриваемый нами объект был нами задан на геометрическом графе Г и интересующие нас процессы мы описали скалярнозначными функциями u(x): Г→R, непрерывными на Г. Мы предположили, что для виртуального состояния u(x) заданного на Г объекта может быть описана соответствующая этому состоянию потенциальная энергия в виде

$$\Phi(\mathrm{u}) = \int_\Gamma \frac{pu'^2}{2} dx - \int_\Gamma fu dx. \qquad (1)$$

Оба интеграла по Г мы понимали, как суммы обычных интегралов по ребрам γ_i

Согласно вариационным принципам, реальное состояние исследуемого объекта должно давать минимум его энергии (1).

$$\int_{\Gamma} pu'(x)h'(x)dx - l(h) = 0 \qquad (2)$$

для любой допустимой функции h(x).

Уравнение (2) называется вариационным уравнением Лагранжа, которое связано с обычным уравнением Эйлера [3, с. 146].

Далее в своем исследовании мы корректно определили и проанализировали главную математическую модель, которой было посвящено исследование. Мы допустили что изучаемая реальная система, состояние которой описывается скалярнозначной функцией u(x), находится под действием закона наименьшего действия, а потенциальная энергия этой системы, соответствующая виртуальному состоянию u(x), определяется интегралом

$$\mathrm{V(u(x))} = \int_{\Gamma} \frac{pu'^2}{2} dx - \int_{\Gamma} udF, \qquad (3)$$

где Г – некоторый конечный граф из R^3.

$$V_{\xi}(u) = \int_{\Gamma} \frac{pu'^2}{2} dx - u(\xi). \qquad (4)$$

Этот последний функционал отличается от предыдущего тем, что второе слагаемое не имеет привычного интегрального вида, но может определяться дифференциалом Стильтьеса с единичным атомом меры. Физический смысл второго слагаемого очевиден – оно определяет работу, выполненную единичной силой на дистанции $u(\xi)$. Поэтому физический смысл минимали (4) – реальная форма, принятая системой под воздействием приложенной в точке x = ξ единичной силы.

Через Е мы обозначили множество физически допустимых функций, которые определены, непрерывны на Г и имеют почти всюду на ребрах Г обычную производную.

Функцию влияния $H_{\xi}(x)$, зависящую пока от ξ как от параметра, мы обозначили через Н(х, ξ) [5, с. 305]

Предположение, что состояние реальной системы описывается вариационным принципом, т.е. функция влияния Н(х, ξ) определена как минималь функционала, соответствующая единичному внешнему усилию, сосредоточенному в точке х = ξ, показано главное свойство функции влияния – способность определять реальное состояние объекта в интегральном виде $u(x)=\int\limits_{\Gamma} H(x,s)f(s)ds$ [1, с. 177].

Список литературы

1. Обласова И.Н. Актуальность применения интеграла Римана-Стилтьеса в моделировании сингулярно закрепленной консоли / И.Н. Обласова, Н.В. Ширяева, Я.С. Агаханова // Наука в современном информационном обществе: Материалы II международной научно-практической конференции. – 2013. – С. 177–180. – EDN TKIAZH

2. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев [и др.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с. EDN RXGRXD

3. Покорный Ю.В., Белоглазова Т.В., Дикарева Е.В., Перловская Т.В. О функции Грина для локально взаимодействующей системы обыкновенных уравнений разного порядка // Мат. заметки. – 2003. – Т. 74. №1. – С. 146–149.

4. Обласова И.Н. Обоснование математической модели сингулярно закрепленной консоли / И.Н. Обласова, Н.В. Ширяева // Вестник Северо-Кавказского федерального университета. – 2013. – №1 (34). – С. 48–54. – EDN RRUWRB

5. Oblasova I. Implementation of an integro-differential model of a singularly loaded rod by the finite element method / I. Oblasova, E. Timofeeva, N. Shiryaeva // Lecture Notes in Networks and Systems. 2022. Vol. 424. P. 301–315. DOI 10.1007/978-3-030-97020-8_28. EDN BTGPPF

6. Ладченко Я.С. Математическое моделирование функции влияния упругой сети на основе принципа Хикса / Я.С. Ладченко [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://clck.ru/3MvEKf (дата обращения: 30.06.2025).