Прокопьев Виталий Александрович
учитель
МБОУ «Сятракасинская СОШ»
д. Сятракасы, Чувашская Республика

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО ЭКОНОМИКЕ

Аннотация: *в статье рассматривается использование методов математического анализа при определении оптимальных параметров работы фирмы в условиях совершенной конкуренции. Предлагается шире использовать математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления в 11 классе для приобретения навыков, которые позволяют анализировать сложные экономические процессы, принимать обоснованные управленческие решения и, в конечном итоге, добиваться успеха в бизнесе. Эти знания дают нам возможность не просто существовать на рынке, но и активно формировать его, находить наиболее эффективные пути развития.*

Ключевые слова: *совершенная конкуренция, выручка, издержки производства, оптимизация параметров работы, дифференциальный анализ, интегральный анализ.*

Обращаясь к обучающимся: «Вы являетесь руководителем небольшой фирмы. Ваша главная задача – не просто производить данный вид товара, а делать это так, чтобы получить максимальную прибыль». И где это сочетание между количеством производимой продукции и получаемой от этого прибыли. Как при минимальных расходах достичь максимальной прибыли. Это главная задача любой фирмы. И вот тут на помощь приходит математика, а именно – дифференциальное и интегральное исчисление, которое изучается в рамках школьного предмета «Алгебра и начала математического анализа» в 11 классе. Это очень мощный и достаточно понятный обучающимся математический аппарат. Он предоставит логичные и полезные инструменты для понимания того, как работает бизнес. В 11 классе на уроках экономики важно не только изучать теоретические аспекты, но и уметь применять математические методы для более глубокого понимания экономических процессов. Одним из таких методов является дифференциальное и интегральное исчисление, которое помогает анализировать оптимальные решения в условиях совершенной конкуренции.

Когда мы говорим о фирме, работающей в условиях совершенной конкуренции, одной из ключевых задач является определение оптимального количества выпускаемой продукции (точки экстремума из курса алгебры). Это количество должно максимизировать прибыль фирмы, что возможно только при правильном анализе затрат и доходов.

Рассмотрим определение оптимального количества выпуска продукции фирмой в условиях совершенной конкуренции.

Прежде всего, давайте вспомним, что такое совершенная конкуренция? Это такая ситуация на рынке, когда:

– много продавцов и много покупателей: никто из них не может повлиять на цену;

– товары одинаковые: покупателю все равно, у кого покупать, потому что товар везде один и тот же;

– свободный вход и выход: фирмы могут легко начать или прекратить производство;

– доступна полная информация: все знают цены и условия.

В таких условиях цена на продукцию устанавливается рынком, и ваша фирма может продать столько, сколько захочет, по этой рыночной цене. Ваша задача – выбрать такой объем производства, который принесет вам наибольшую прибыль.

Чтобы понять, как максимизировать прибыль в данных условиях, нам нужно разобраться понятиях.

Издержки производства: сколько вы тратите на производство каждой единицы продукции?

Выручка: сколько денег вы получаете от продажи произведенной вами продукции?

Прибыль = Выручка – Издержки

Наша цель – сделать эту разницу как можно больше.

В математике производная показывает, как быстро меняется функция. В экономике мы можем использовать производную для изучения предельных издержек (сколько стоит произвести еще одну единицу продукции) и предельной выручки (сколько вы дополнительно заработаете, продав еще одну единицу продукции).

Фирма достигает максимальной прибыли, когда предельная выручка равна предельным издержкам. Если предельная выручка больше предельных издержек, значит, производство еще одной единицы принесет вам дополнительную прибыль. Если предельные издержки больше предельной выручки, то производство еще одной единицы приведет к убыткам. Значит, оптимальный объем – это тот, где эти два показателя уравниваются.

Математически это выглядит так: если функция прибыли – это $P(q)$, где q – количество продукции, то для нахождения максимума мы ищем точку (точки экстремума), где производная равна нулю.

$$P'(q) = 0.$$

А поскольку прибыль – это выручка $TR(q)$ минус издержки $TC(q)$,

$$P(q) = TR(q) - TC(q).$$

Отсюда:

$$P'(q) = TR'(q) - TC'(q).$$

Следовательно:

$$TR'(q) = TC'(q),$$

что и означает равенство предельной выручки и предельных издержек.

Дифференциальным исчислением разобрались. А как быть с интегральным исчислением. Интегральное исчисление может показаться менее очевидным в данном контексте, но оно тоже играет свою роль:

Расчет общих издержек и выручки: если у нас есть функция предельных издержек или предельной выручки, то мы можем использовать интеграл, чтобы найти общие издержки или общую выручку при определенном объеме производства. Например, если мы знаем, функцию маржинальных издержек (предельные издержки), то, проинтегрировав эту функцию по объему производства, мы получим общие издержки. Это помогает нам построить более полную картину финансовых потоков фирмы.

Интегралы также могут помочь нам понять, как изменяются издержки или выручка с течением времени или при изменении других факторов.

Пример.

Пусть фирма имеет следующие функции.

Общие издержки:

$$TC(q) = 100 + 5q + 0.1q^2,$$

где q – количество в штуках).

И пусть рыночная цена P = 20 (в условиях совершенной конкуренции цена фиксирована). Тогда общая выручка будет:

$$TR(q) = P * q = 20q.$$

Прибыль:

$$P(q) = TR(q) - TC(q) = 20q - (100 + 5q + 0.1q^2).$$

Отсюда:

$$P(q) = 15q - 0.1q^2 - 100.$$

Теперь применим дифференциальное исчисление, чтобы найти оптимальный объем выпуска.

1. Находим производную функции прибыли:

$$P'(q) = (15q - 0.1q^2 - 100)' = 15 - 0.2q.$$

2. Приравниваем производную к нулю, чтобы найти максимум:

$$15 - 0.2q = 0$$

$$0.2q = 15$$

$$q = 15 : 0.2 = 75$$

$$q = 75.$$

Итак, оптимальное количество выпуска товара фирмы – 75 штук. При этом объеме прибыль фирмы будет максимальной.

А что с интегралами?

Пусть предельные издержки описывается функцией

$$MC(q) = 5 + 0.2q,$$

а это производная от TC(q), то, проинтегрировав эту функцию, мы бы получили общие издержки (плюс константа, которую мы знаем из исходной функции C(q). Это демонстрирует, как интегралы помогают «собирать» информацию о частях в единое целое.

Изучая эти математические инструменты, мы не просто решаем абстрактные задачи. Теперь мы умеем:

– анализировать сложные ситуации: экономика полна переменных, и математика дает вам язык для их описания и анализа;

– принимать обоснованные решения: понимание того, как издержки и выручка влияют на прибыль, позволяет принимать более взвешенные решения в бизнесе;

– прогнозировать результаты: математические модели помогают предсказывать, как изменения в производстве или на рынке повлияют на финансовое состояние фирмы.

Таким образом, дифференциальное и интегральное исчисление – это не просто сухие математические формулы из курса математики. Это мощные инструменты, которые помогают понять, как работает мир бизнеса, и найти самые эффективные пути к успеху. Даже в условиях совершенной конкуренции, где кажется, что все решается рынком, именно математика позволяет фирме найти свою «золотую середину» и максимизировать свою прибыль

И вот, получив оптимальное количество производимых товаров в количестве 75 штук, вы можете подумать: «Ну и что дальше? Я нашел свою точку экстремума – точку максимума получения прибыли, и все?» Конечно, нет! Мир экономики постоянно меняется, и ваша задача – постоянно адаптироваться.

Предположим, что цена на сырье внезапно выросла. Это повлияет на ваши издержки производства. Пусть функция общих издержек изменится и примет вид:

$$TC(q) = 100 + 7q + 0.1q^2.$$

Теперь новая функция прибыли:

$$P(q) = TR(q) – TC(q)$$

$$P(q) = 20q – (100 + 7q + 0.1q^2)$$

$$P(q) = 13q – 0.1q^2 – 100.$$

Находим первую производную:

$$P'(q) = 13 – 0.2q.$$

Решаем уравнение:

$$P'(q) = 0 \text{ (для определения точек экстремума).}$$

Приравниваем к нулю и получаем уравнение:

$$13 – 0.2q = 0.$$

Отсюда:

$$q = 13 / 0.2 = 65.$$

Вывод: оптимальный объем производства снизился до 65 ед. Рост цен на сырье требует сократить производство, чтобы сохранить максимальную прибыль.

Этот простой пример показывает, как важно постоянно следить за общей ситуацией на рынке и использовать математические инструменты для принятия решений. В реальном мире, даже в условиях, близких к совершенной конкуренции, фирмы могут пытаться влиять на спрос на свою продукцию. Например, вы можете запустить небольшую рекламную кампанию, чтобы подчеркнуть уникальность вашего товара (даже если они, такие же, как у всех). Это может немного увеличить спрос и, соответственно, цену, по которой вы можете продавать свой товар.

Допустим, ваша реклама сработала, и теперь вы можете продавать по цене $P = 22$ денежных единиц.

Новая функция выручки:

$$TR(q) = 22q.$$

Новая функция прибыли (используем издержки после подорожания сырья):

$$P(q) = TR(q) − TC(q)$$

$$P(q) = 22q – (100 + 7q + 0.1q^2)$$

$$P(q) = 15q – 0.1q^2 – 100.$$

Находим производную:

$$P'(q) = 15 – 0.2q.$$

Решим уравнение:

$$P'(q) = 0.$$

Приравниваем к нулю:

$$15 – 0.2q = 0.$$

Отсюда:

$$q = 15 / 0.2 = 75.$$

В этом случае, увеличение цены благодаря рекламе позволило вам вернуться к производству 75 единиц, несмотря на подорожание сырья.

Этот пример демонстрирует, что даже в условиях, близких к совершенной конкуренции, у фирмы есть возможности для маневра. И математика помогает оценить, насколько эффективны эти маневры.

Более того, понимание принципов дифференциального и интегрального исчисления позволяет глубже анализировать экономические модели, которые вы изучаете в школе.

Пример.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть предельные затраты фирмы описываются функцией:

$$MC(Q) = 2Q+3.$$

А цена товара в условиях совершенной конкуренции составляет 10 единиц. Тогда предельный доход будет равен 10. Чтобы найти оптимальное количество выпуска, мы приравниваем предельные затраты к предельному доходу:

$$2Q + 3 = 10.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$2Q = 10 – 3$$

$$2Q = 7$$

$$Q = 3.5.$$

Таким образом, оптимальное количество выпуска продукции составляет 3.5 единицы. Это количество максимизирует прибыль фирмы, так как при этом предельные затраты равны предельному доходу. Используя методы дифференциального и интегрального исчисления, ученики могут глубже понять механизмы принятия решений в условиях совершенной конкуренции.

Правило максимизации прибыли: Математика подсказывает нам, что прибыль будет максимальной тогда, когда предельные издержки (MC) равны предельному доходу (MR).

Если мы производим меньше, чем точка MC=MR, то каждая дополнительная единица продукции приносит нам больше дохода, чем стоит ее производство. Значит, мы можем увеличить прибыль, увеличив выпуск.

Если мы производим больше, чем точка MC=MR, то каждая дополнительная единица продукции стоит нам больше, чем приносит дохода. Значит, мы теряем деньги, производя сверх этого объема.

Как это выглядит на практике? Мы можем построить графики, где по одной оси откладываем объем производства, а по другой – издержки и доход. Точка пересечения кривых MC и MR будет указывать на оптимальный объем выпуска. Дифференциальное исчисление помогает нам находить эти точки пересечения, анализируя функции издержек и дохода.

Интегральное исчисление может быть полезно для анализа общих затрат и доходов на определенном интервале. Например, если мы знаем

функции предельных затрат и предельного дохода, мы можем интегрировать эти функции для нахождения общих затрат и доходов на заданном интервале производства.

Общие затраты можно выразить как интеграл от функции предельных затрат:

$$TC(Q) = \int MC(q)dq,$$

где $MC(q)$ – функция предельных затрат. Аналогично, общий доход можно выразить как:

$$TR(Q) = \int Pdq,$$

где P– цена товара, которая в условиях совершенной конкуренции остается постоянной.

Таким образом, интегральное исчисление позволяет нам получить полное представление о затратах и доходах фирмы на определенном уровне производства, что является важным для принятия управленческих решений.

Интегральное исчисление, в отличие от дифференциального позволяет суммировать и находить общие значения. В контексте нашей задачи оно помогает нам понять общие издержки и общий доход за весь период производства.

Общие издержки (TC) – это сумма всех затрат на производство определенного количества продукции. Интеграл от функции предельных издержек (MC) даст нам функцию общих издержек (TC). То есть, если мы знаем, сколько стоит произвести каждую дополнительную единицу, мы можем «сложить» все эти затраты, чтобы узнать общую сумму.

Общий доход (TR) – это сумма всех денег, полученных от продажи всей произведенной продукции. В условиях совершенной конкуренции общий доход – это просто цена, умноженная на количество проданной продукции.

Как это связано с оптимальным объемом? Хотя дифференциальное исчисление напрямую указывает на точку максимизации прибыли, интегральное исчисление помогает нам оценить общую эффективность нашего производства. Зная общие издержек и общий доход при оптимальном объеме, мы можем рассчитать общую прибыль (TR – TC) и убедиться, что она действительно максимальна.

Пример.

Пусть функция предельных издержек (MC) для нашего товара описывается формулой

$$MC(q) = 2q + 10,$$

где q – количество товара в шт. А цена на рынке (и, следовательно, предельный доход MR) составляет 50 рублей за единицу товара.

Находим оптимальный объем с помощью дифференциального исчисления:

Мы знаем, что прибыль максимизируется, когда

$$MC = MR.$$

Подставим значения и получим уравнение:

$$2q + 10 = 50.$$

Решая данное уравнение, получим:

$$2q = 40$$

$$q = 20 \text{ шт.}$$

Итак, оптимальный объем производства – 20 шт.

Оцениваем общие издержки и доход с помощью интегрального исчисления: чтобы найти функцию общих издержек зная функцию маржинальных затрат, нужно найти интеграл (первообразную) от этих маржинальных (предельных) затрат.

Итак:

$$TC(q) = \int(2q + 10)\,dq = q^2 + 10q + C.$$

Предположим, что постоянные издержки (когда q=0) равны 0, тогда C=0.

$$TC(q) = q^2 + 10q.$$

При q=20,

$$TC(20) = 20^2 + 10*20 = 400 + 200 = 600 \text{ рублей}.$$

Общий доход (TR):

$$TR(q) = P\ q = 50\ q.$$

При q=20,

$$TR(20) = 50 * 20 = 1000 \text{ рублей}.$$

Общая прибыль:

$$\text{Прибыль} = TR(20) – TC(20) = 1000 – 600 = 400 \text{ рублей}.$$

Таким образом, математика не просто абстрактные формулы, а мощный инструмент, который помогает нам принимать обоснованные экономические решения. Понимание того, как меняются издержки и доходы при изменении объема производства, позволяет нам не только максимизировать прибыль, но и лучше ориентироваться в сложном мире рыночных отношений. В условиях совершенной конкуренции, где цена задана извне, именно умение управлять издержками и находить оптимальный объем выпуска становится ключом к успеху. Дифференциальное и интегральное исчисление дают нам для этого точные и надежные инструменты.

Список литературы

1. Савицкая Е.В. Уроки экономики в школе: пособие для учителя / Е.В. Савицкая, С.Ф. Серегина. – В 2 кн. Кн. 2. – М.: Вита-Пресс, 1999. – 447 с.

2. Мицкевич А.А. Сборник заданий по экономике: пособие для преподавателей экономики / А.А. Мицкевич. – В 3 кн. Кн. 1. Задачник по микроэкономике с решениями: сборник задач. – М.: Вита-Пресс. – 2001. – 592 с.

3. Любимов Л.Л. Основы экономических знаний: учебник для 10 и 11 классов с углубленным изучением экономики / Л.Л. Любимов, Н.А. Раннева. – 2-е изд. – М.: Вита-Пресс, 1998. – 496 с.