

Павлов Андрей Валерианович

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики»

г. Москва

DOI 10.21661/r-587178

СОВПАДЕНИЕ СИНУС- И КОСИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Аннотация: в статье доказывается ряд теорем об аналитичности преобразований Лапласа от интегральных преобразований Фурье, представленных в различных формах. В качестве следствия из свойств отражения сумм преобразований Лапласа установлена чётность (нечётность) преобразования Лапласа от, соответственно, нечётного (чётного) преобразования Фурье. Аналитичность преобразований Лапласа от преобразований Фурье общего вида влечёт за собой свойство перестановочности косинус- и синус-преобразований Фурье для функций, заданных на положительной полуоси. Кроме того, доказано совпадение косинус-преобразования Фурье с синус-преобразованием Фурье для широкого класса функций.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, преобразование Фурье, аналитичность, чётность и нечётность преобразований, косинус-преобразование Фурье, синус-преобразование Фурье, перестановочность интегральных преобразований.

Введение.

В данной работе методами преобразований Лапласа [1–4] доказывается перестановочность $S^0 C^0 = C^0 S^0$ косинус и синус преобразований Фурье в достаточно общих условиях теоремы 1. Все результаты статьи следуют из леммы 1 о регулярности преобразований Лапласа от преобразований Фурье, определенных на положительной части действительной оси. Как следствие доказывается совпадение косинус и синус преобразований в общих условиях теоремы 1:

$$C^0 S(x)(\cdot)(v) = S^0 S(x)(\cdot)(v), v \in (-\infty, \infty).$$

Здесь, по определению,

$$\int_0^{\infty} \cos xv S(x) dx = C^0 S(x)(\cdot)(v) = C^0, \int_0^{\infty} \sin xv S(x) dx = S^0 S(x)(\cdot)(v) = S^0, v \in (-\infty, \infty),$$

$$C^0 S^0 = C^0 [S^0 S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(t), S^0 C^0 = S^0 [C^0 S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(t), t \in [0, \infty),$$

Следствием является также четность и нечетность преобразований Лапласа от, соответственно, нечетного и четного интегрального преобразования Фурье на $[0, \infty)$, (замечание к теореме 1). Обозначим

$$L_{\pm} = L_{\pm} S(x)(\cdot)(v) = \int_0^{\infty} e^{\pm ix} S(x) dx, L = L_-, F_{\pm}^0 = F_{\pm}^0 S(x)(\cdot)(v) = \int_0^{\infty} e^{\pm i xv} S(x) dx,$$

L – оператор преобразования Лапласа;

$$L F_{\pm}^0 = L F_{\pm}^0 S(x)(\cdot)(v) = \int_0^{\infty} e^{-vt} dt \int_0^{\infty} e^{\pm ixt} S(x) dx, L_+ F_{\pm}^0 = L_+ F_{\pm}^0 S(x)(\cdot)(v) = \int_0^{\infty} e^{vt} dt \int_0^{\infty} e^{\pm ixt} S(x) dx,$$

$$F_{\pm} = F_{\pm} S(x)(\cdot)(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i xv} S(x) dx = F_{\pm} S(x)(\cdot)(v), v \in (-\infty, \infty).$$

1. Регулярность преобразований Лапласа.

Докажем несколько фактов, которые понадобятся нам во второй части статьи. Нам понадобится условие Y1 для функции $S(p)$.

Условие Y1: функция $S(p)$ регулярна во всей комплексной плоскости за исключением быть может конечного числа особых точек, не принадлежащих действительной оси, $S(0) = 0$, первая производная абсолютно интегрируема на всей действительной оси,

$$|S(p)| |p|^{2+\delta} \rightarrow 0, |p| \rightarrow \infty,$$

при некотором $\delta > 0, \delta = const.$

Теорема 1.

При выполнении условия Y1

$$C^0 S^0 = S^0 C^0 : C^0 [S^0 S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(y) - S^0 [C^0 S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(y) = 0, y \in [0, \infty).$$

Доказательство.

Рассмотрим две функции

$$L_{right}^0(p) = L F_+^0 = L F_+^0 S(x)(\cdot)(p), L_{left}^0 = L_+ F_+^0 = L_+ F_+^0 S(x)(\cdot)(p),$$

первая из которых определена в правой $\operatorname{Re} p \geq 0$, а вторая в левой $\operatorname{Re} p \leq 0$ комплексных полуплоскостях. Нам понадобится Лемма 1.

Лемма 1.

В условиях теоремы 1 функция $L_{right}^0(p)$ аналитична во всей комплексной плоскости при четной или нечетной функции $S(p)$ в ее области определения.

Доказательство.

Пусть $S(p)$ нечетна во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа точек. Функция $L_{left}^0 = L_+ F_+^0 S(x)(\cdot)(p)$ является четным отражением функции $L_{right}^0(p) = L F_+^0 S(x)(\cdot)(p)$ из правой полуплоскости в левую.

Так как сумма двух функций $L_{right}^0(p) + L_{left}^0(p)$ совпадает с этой же отраженной относительно центра координат функцией, (при таком отражении первая функция переходит во вторую, а вторая в первую), то в области аналитичности данной суммы функция $L_{right}^0(p) + L_{left}^0(p)$ четна; мы использовали то, что значения этой суммы на положительной части мнимой оси iy совпадает с аналитической во всей плоскости функцией $L_{right}^0(p) + L_{left}^0(p)$ ввиду

$$\begin{aligned} L_{right}^0(iy) + L_{left}^0(iy) &= 2C^0[C^0 S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(y) + i2C^0[S^0 S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(y) = \\ &= \pi S(y) + iC^0[S^0 S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(y). \end{aligned}$$

Следовательно, сумма $L_{right}^0(p) + L_{left}^0(p)$ аналитична и четна во всей комплексной плоскости за исключением быть может конечного числа особых точек функций

$$S(p), C^0[S^0 S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(p)$$

в условиях леммы 1, (общеизвестно, что данные функции аналитичны во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа точек, [1–3]).

Сравнивая значения суммы $L_{right}^0(p) + L_{left}^0(p) = Q(p)$ на отрицательной части действительной оси с верхней и нижней стороны плоскости, получаем совпадение значения пределов

$$\lim_{p \rightarrow -x, \operatorname{Im} p > 0} Q(p) = \lim_{p \rightarrow -x, \operatorname{Im} p < 0} Q(p),$$

что эквивалентно совпадению пределов с верхней и нижней части плоскости функции $L_{left}^0(p)$:

$$\lim_{p \rightarrow -x, \operatorname{Im} p > 0} L_{right}^0(p) = \lim_{p \rightarrow -x, \operatorname{Im} p < 0} L_{right}^0(p), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

(См. также рассуждение о виде двойного преобразования Лапласа после доказательства леммы 1).

Аналитичность в области определения данных функций суммы и непрерывность этих функций на границах областей определения на мнимой оси общеизвестна и легко проверяется с помощью интегрирования по частям во внутренних интегралах из их определений с учетом условия $S(0) = 0$ теоремы 1 и леммы 1.

Для четной $S(p)$ доказательство аналогично: достаточно рассмотреть разность аналитических функций

$$\begin{aligned} L_{right}^0(iy) - L_{left}^0(iy) &= -2iS^0[C^0S(x)(\cdot)(v) + iS^0S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(y) = \\ &= -\pi S(y) - 2iS^0[C^0S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(y) \end{aligned}$$

с аналитическими во всей комплексной плоскости за исключением быть может конечного числа особых точек функциями

$$S(p), S^0[C^0S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(p)$$

при четной $S(p)$.

При нечетном отражении данная сумма переходит сама в себя и аналитичность разности во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа точек доказана.

Лемма 1 доказана.

Из доказательства леммы 1 следует: функция $LLS(x)(\cdot)(p)$ аналитична в верхней и нижней части плоскости и непрерывна на отрицательной части действительной оси с быть может одинаковыми предельными значениями. Данный факт следует из совпадения функций

$$-(1/i)LLS(x)(\cdot)(p) = L_- F_+^0 S(x)(\cdot)(p/i) = F_+^0 F_+^0 S(x)(\cdot)(p);$$

в данном равенстве вторая функция аналитична по переменной $ix = p$ в верхней полуплоскости и непрерывна на всей действительной оси; аналогично

$$-(1/i)LLS(x)(\cdot)(p) = L_-F_+^0S(x)(\cdot)(p/i) = F_+^0F_+^0S(x)(\cdot)(p),$$

и функция $L_-F_+^0S(x)(\cdot)(p/i)$ аналитична в нижней полуплоскости и непрерывна на отрицательной части действительной оси по переменной $p = -ix$ в условиях теоремы 1 и леммы 1, данный факт, как и равенство

$$-(1/i)LLS(x)(\cdot)(p) = F_+^0F_+^0S(x)(\cdot)(p) = -F_-^0F_-^0S(x)(\cdot)(p)$$

широко известно [1–4]:

$$-(1/i)LLS(x)(\cdot)(p) = L_-F_+^0S(x)(\cdot)(p/i).$$

Из леммы 1 следует совпадение пределов значений функции $-(1/i)LLS(x)(\cdot)(p)$ с нижней и верхней полуплоскости на всей отрицательной части мнимой оси.

Отметим, что в работах Привалова И.И., [4 и др.], равенство нулю интеграла, определяющего действительную часть преобразования Лапласа $L_-F_+^0S(x)(\cdot)(iy)$ считалось общеизвестным, хотя общеизвестно как раз совпадение этого интеграла с $\pi S(y), y \in [0, \infty)$. Исчезновение данной функции доказано впервые в данной работе ввиду симметрии, вызванной отражением, и совершенно не общеизвестно.

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим сумму двух функций

$$L_+(p) = LF_+^0S(x)(\cdot)(p), \operatorname{Re} p \geq 0, L_-(p) = LF_+^0S(x)(\cdot)(p), \operatorname{Re} p \geq 0,$$

первая из которых определена в правой, а вторая в левой части плоскости. Так как это одна и та же аналитическая по лемме 1 во всей плоскости (без, быть может, конечного числа особых точек) функция, то ее сумма на отрицательной части мнимой оси совпадет с удвоенной мнимой частью:

$$L_+(-iy) + L_-(-iy) = 2\operatorname{Im} L_-F_+^0S(x)(\cdot)(-iy) = 2(1/i)LLS(x)(\cdot)(y), \quad y \in [0, \infty).$$

Сумма значений на положительной части мнимой оси тоже чисто мнима, так как значения данных аналитических функций на действительной оси антисопряжены в точках $p = x$ и $p = -x$, и, следовательно, по теореме Римана [3] антисопряжены во всех антисопряженных относительно мнимой оси точках, (ан-

тисопряженность в условиях теоремы 1 при $p = x$ и $p = -x$ следует из известного полученного изменением порядка интегрирования равенства

$$L_+(p) = L_- F_+^0 S(x)(\cdot)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^\infty e^{ixt} S(x) dx = \\ = \int_0^\infty S(t) [-1/(-p + it)] dt, p = x \in [0, \infty), p \notin [0, i\infty), [1-5].$$

Обе эти функции, как было раньше было отмечено, аналитичны каждая со своей стороны плоскости, очевидно, без особых точек внутри своей полуплоскости и непрерывны на всей мнимой границе, (по лемме 1), следовательно [3], их сумма аналитична во всей комплексной плоскости без особых точек, что эквивалентно совпадению функции $L_+(iy) + L_-(iy)$ с константой ноль, ввиду стремления данной функции к нулю на бесконечности на отрицательной части мнимой оси после изменения порядка интегрирования [1–4] в условиях теоремы 1 [1–3].

Приравнивая нулю мнимые значения суммы на положительной части мнимой оси

$$2i(-SC + CS) = L_+(iy) + L_-(iy) = 2i \operatorname{Im} L_- F_+^0 S(x)(\cdot)(iy) = \\ = i(C^0[S^0 S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(y) - S^0[C^0 S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(y)) = 0, y \in [0, \infty),$$

получаем утверждение теоремы 1.

Замечание.

Повторяя доказательство четности и нечетности суммы и разности функций леммы 1 получаем, что сумма исходной функции $LL = LLS(x)(\cdot)(p)$ и отраженной относительно центра координат функцией $LLS(x)(\cdot)(-p)$ совпадает на мнимой оси с

$$LLS(x)(\cdot)(iy) + LLS(x)(\cdot)(-iy) = 2C^0[LS(x)(\cdot)(v)](\cdot)(y), y \in [0, \infty);$$

такая функция совпадает с этой же отраженной относительно центра координат суммой (при таком отражении первая функция переходит во вторую, а вторая в первую), и в области аналитичности данной суммы $2C^0[LS(x)(\cdot)(v)](\cdot)(p)$ четна и аналитична при нечетной аналитической функцией $S(p)$.

Аналогично, разность этих функций совпадает с нечетной, аналитической в открытой окрестности мнимой оси функцией $2iS^0[LS(x)(\cdot)(v)](\cdot)(p)$.

Ввиду известных равенств

$$C^0[LS(x)(\cdot)(v)](\cdot)(x) = L[S^0S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(x),$$

$$S^0[LS(x)(\cdot)(v)](\cdot)(x) = L[C^0S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(x),$$

$x \in [0, \infty)$, получаем четность и нечетность преобразований Лапласа $L[S^0S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(x)$ и $L[C^0S(x)(\cdot)(v)](\cdot)(x)$ при, соответственно, нечетной и четной функции $S(p)$ в условиях теоремы 1.

2. Перестановочность синус и косинус преобразований Фурье.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится лемма 2 об аналитичности преобразований Лапласа и операторов C^0S^0 и S^0C^0 во всей комплексной плоскости за исключением быть может конечного числа точек в общих условия аналитичности без требований четности функции $S(p)$ в условиях теоремы 1. Аналитичность S^0C^0 при четной аналитической функции $S(p)$ как и аналитичность C^0S^0 при нечетной аналитической функции $S(p)$ давно известна (см., например, [1; 2]).

Лемма 2.

Функции C^0S^0 и S^0C^0 аналитичны во всей комплексной плоскости (вместе со своими значениями на всей действительной оси) за исключением быть может конечного числа точек, не принадлежащих действительной оси, при любой аналитичной в во всей плоскости функции $S(p)$, удовлетворяющей условию Y1, (четность или нечетность функции $S(p)$ необязательна).

Доказательство.

Для доказательства леммы 2 можно воспользоваться леммой 1, в которой

$$L_-F_+^0u(x)(\cdot)(z) = L_-[C^0 + iS^0]u(x)(\cdot)(z) = (LC^0 + iLS^0)u(x)(\cdot)(z),$$

в которой по лемме 1 $L_-F_+^0$ – аналитическая функция, как и

$$L_-F_+^0u(x)(\cdot)(iy) = F_-^0F_+^0u(x)(\cdot)(y), (F_-^0F_+^0 + F_+^0F_+^0)/2, (F_-^0F_+^0 - F_+^0F_+^0)/2i.$$

Аналитичность вместе со своими значениями при отрицательных y вытекает из аналитичности и чистой мнимости значений ${}^{2L}F_+^0 S(x)(\cdot)(iy)$ на всей мнимой оси вместе со своими значениями при всех y , (как в окончании доказательства теоремы 1); одно слагаемое в данной мнимой сумме всегда аналитично вместе со своими значениями при всех действительных y как выражение от аналитической четной или нечетной функции, следовательно. аналогичный факт верен и для другого слагаемого.

Лемма 2 доказана.

Теорема 2.

В условиях теоремы 1 $S^0 = C^0$, $y \in [0, \infty)$.

Доказательство.

Из равенства $C^0 S^0 = S^0 C^0$, $y \in [0, \infty)$, и, отмеченной в лемме 2 аналитичности данных функций, с помощью равенства $(C^0 + S^0)C^0 = (C^0 + S^0)S^0$, $y \in [0, \infty)$ получаем аналогичное равенство на всей действительной оси:

$$(C + S)C^0 = (C + S)S^0, y \in (-\infty, \infty).$$

Теперь утверждение теоремы 2 вытекает из формулы обращения оператора $C + S$. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Павлов А.В. Преобразование Фурье и формула обращения преобразования Лапласа / А.В. Павлов. – М.: Математические заметки, 2011. – Т. 90. №5. – С. 793–796.
2. Pavlov A.V. About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier / A.V. Pavlov. – Petrozavodsk: Issues of Analysis, 2016. – V. 23. №1. – p. 21–30.
3. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
4. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов. – М.: Наука, 1984.