***Калягина Наталья Александровна***

учитель

МАОУ «Порецкая СОШ»

с. Порецкое, Чувашская Республика

# ПОДГОТОВКА К ЕГЭ: ОТБОР КОРНЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

***Аннотация:*** *в статье рассматривается вопрос методов отбора корней тригонометрического уравнения. Отбор корней в тригонометрических уравнениях – это процесс выбора из найденных корней тех, которые принадлежат указанному промежутку или интервалу. Для этого используют разные методы, например метод с использованием единичной окружности, графический метод, метод подбора и метод решения двойного неравенства.*

***Ключевые слова:*** *тригонометрическое уравнение, отбор корней, ЕГЭ по математике, графический метод, метод подбора, метод решения двойного неравенства, использование единичной окружности.*

Решение тригонометрических уравнений и отбор корней, принадлежащих заданному промежутку – это одна из сложнейших тем математики, которая выносится на Единый Государственный Экзамен. Многие учащиеся затрудняются или вообще не умеют решать тригонометрические уравнения и особенно затрудняются в отборе корней, принадлежащих промежутку. Решение тригонометрических уравнений на ЕГЭ сопровождается этапом отбора корней, который позволяет выбрать подходящие значения переменной среди множества решений. Этот этап особенно важен, поскольку общий вид решений может содержать бесконечное количество значений, и лишь некоторые из них удовлетворяют условиям конкретной задачи. Существует несколько методов отбора корней: метод с использованием единичной окружности, графический метод, метод подбора, метод решения двойного неравенства. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки, выбор конкретного метода зависит от особенностей решаемой задачи и уровня подготовки учащегося.

Рассмотрим методы отбора корней тригонометрического уравнения на конкретном примере. Решить уравнение 2 sin2x – 3cos(-x) – 3 = 0, найти все

корни уравнения, принадлежащие отрезку [2π; $\frac{7\pi}{2}$ ].

2 sin2x – 3 cos(-x) – 3 = 0,

т. к. sin2x = 1 – cos2x и cos(-x) = cos x, то

2(1 – cos2x) – 3 cos x – 3 = 0; 2 – 2cos2x – 3 cos x – 3 = 0;

2cos2x + 3 cos x + 1 = 0; (cos x +1) (2 cos x + 1) = 0.

Значит, cos x = -1, откуда x = π + 2πk, k ε Z,

или cos x = - $\frac{1}{2}$, откуда x = $\frac{2\pi}{3}$ + 2πn, n ε Z, x = – $\frac{2\pi}{3}$ + 2πm, m ε Z.

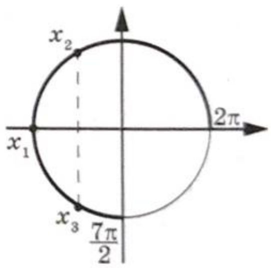
а) Отберём корни с помощью числовой окружности, принадлежащие

отрезку [2π; $\frac{7\pi}{2}$ ].

Получаем: x1 = 2π + π =3π,

x2 = 3π – $\frac{\pi}{3}$ = $\frac{8\pi}{3}$;

x3 = 3π + $\frac{\pi}{3}$ = $\frac{10\pi}{3}$.

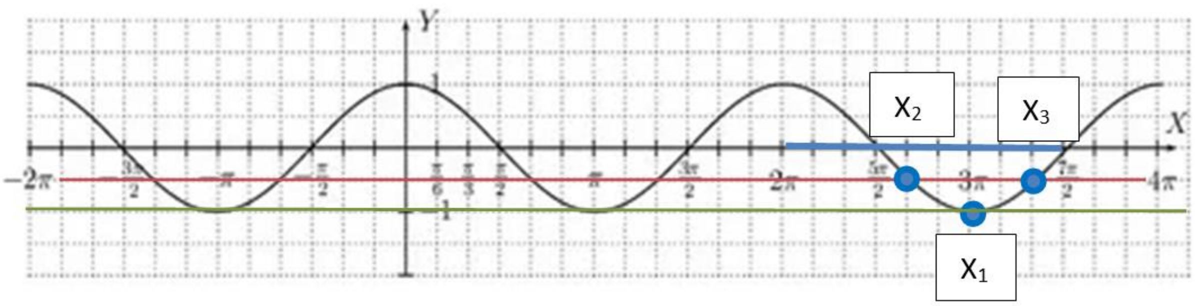



Данный метод – метод с использованием единичной окружности.

Этот метод основан на представлении угла на единичной окружности. Преимущества данного метода – быстрота и наглядность. Подходит для визуализации решений. Требует хорошего знания свойств тригонометрических функций и расположения углов на окружности. Может привести к ошибкам при недостаточной внимательности.

б) Отберём корни с помощью графика тригонометрической функции y = cos x, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$ и графиков двух функций y = -1, y = $-\frac{1}{2}$.

Функция y = cos x – чётная, т.к. cos(-x) = cos x. График симметричен относительно оси ординат. Функция периодическая с периодом 2π. Функция ограничена – область значений – отрезок [-1; 1].




$y = \cos x$, $y = -1$, $y = -\frac{1}{2}$.

$$x_1 = 3\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{16\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}, \quad x_3 = \frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{20\pi}{6} = \frac{10\pi}{3}.$$

Данный метод – графический. Этот метод заключается в построении графиков функций и определении точек их пересечения. Преимущества данного метода – наглядность и простота понимания. Возможность увидеть периодичность и симметрию функций. Но есть и недостатки – точность результата зависит от точности построения графика, требуется внимание и аккуратность при построении.

в) Отберём корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$, с помощью метода подбора, т. к. один из корней уравнения $x = \pi + 2\pi k$, $k \varepsilon Z$, то

если $k = 0$, получаем $x = \pi \not\varepsilon [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$;

если $k = 1$, то $x = 3\pi \varepsilon [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$;

если $k = 2$, то $x = 5\pi \not\varepsilon [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$;

если $k = 3$, то $x = 7\pi \not\varepsilon [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$;

т. к. другой из корней уравнения $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \varepsilon Z$, то

если $n = 0$, получаем $x = \frac{2\pi}{3} \not\varepsilon [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$;

если $n = 1$, получаем $x = \frac{8\pi}{3} \varepsilon [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$;

если $n = 2$, получаем $x = \frac{14\pi}{3} \not\varepsilon [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$;

т. к. третий из корней уравнения $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \varepsilon Z$, то

если $m = 0$, получаем $x = -\frac{2\pi}{3} \not\varepsilon [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$;

если $m = 1$, получаем $x = \frac{4\pi}{3} \not\varepsilon [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$;

если $m = 2$, получаем $x = \frac{10\pi}{3} \varepsilon [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$;

если $m = 3$, получаем $x = \frac{16\pi}{3} \not\varepsilon [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

Подбор корней (отбор корней) в тригонометрическом уравнении – это процесс, при котором из найденных корней выбирают те, которые принадлежат указанному числовому промежутку. Это задача не простая, так как корнями тригонометрических уравнений, как правило, являются целые наборы решений, которые задаются с помощью периода. Преимущества данного метода – простота реализации, надёжность результатов при правильном подборе. Недостатки – длительность процесса при большом количестве вариантов. Возможны пропуски некоторых решений.

г) Отберём корни, с помощью двойного неравенства, т. к. один из корней уравнения $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$ и нужно отобрать корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$, то

$2\pi \le \pi + 2\pi k \le \frac{7\pi}{2}$, $\pi \le 2\pi k \le \frac{5\pi}{2}$, $\frac{1}{2} \le k \le \frac{5}{4}$, $k = 1$, поэтому $x1 = \pi + 2\pi = 3\pi$ ;

т. к. другой из корней уравнения $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$, и нужно отобрать корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$, то

$2\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le \frac{7\pi}{2}$, $\frac{4\pi}{3} \le 2\pi n \le \frac{17\pi}{6}$, $\frac{4}{6} \le n \le \frac{17}{12}$, $n = 1$, значит $x2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$;

т. к. третий из корней уравнения $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$, и нужно отобрать корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$, то

$2\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m \le \frac{7\pi}{2}$, $\frac{8\pi}{3} \le 2\pi m \le \frac{25\pi}{6}$, $\frac{4}{6} \le m \le \frac{17}{12}$, $m = 2$, значит $x3 = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{10\pi}{3}$.

Метод решения двойного неравенства – это метод, в котором используются свойства монотонности и ограниченности тригонометрических функций. Решение сводится к решению системы (группе) неравенств, определяющих интервал, в котором находятся корни. Преимуществами данного метода является высокая точность и надёжность, а также универсальность для различных типов уравнений. Сложность вычислений и большой объем алгебраической работы являются недостатками этого метода.

Уравнение $2\sin 2x - 3\cos(-x) - 3 = 0$ имеет корни: $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$.

Корни уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$: $\frac{8\pi}{3}$; $3\pi$; $\frac{10\pi}{3}$.

Выбор метода отбора корней зависит от конкретных требований задачи и предпочтений ученика. Важно понимать принципы каждого подхода и уметь применять наиболее подходящий способ в зависимости от ситуации. Развитие навыков решения тригонометрических уравнений способствует развитию математического мышления и повышает уровень подготовки учащихся.

***Список литературы***

1. ЕГЭ 2026. Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты. 36 вариантов / И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, Е.А. Коновалов; под ред. И.В. Ященко. – М.: Экзамен, 2026. – 215 с.

2. Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://urok.1sept.ru/publication/187039 (дата обращения: 12.01.2026).