Матвеева Елизавета Денисовна

учитель

МБОУ «СОШ №20 им. В. Митты с УИОП»

г. Новочебоксарск, Чувашская Республика

КЛАССИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА В ТРАПЕЦИИ (ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ УЧИТЕЛЯ)

Аннотация: *в статье обобщается опыт работы по изучению классических неравенств в трапеции на уроках геометрии в старших классах и на факультативных занятиях. Рассматриваются основные соотношения между сторонами, диагоналями, высотой и средней линией трапеции, средними гармоническими и средним геометрическим.*

Ключевые слова: *трапеция, классические неравенства, геометрические неравенства, средняя линия, диагонали, опыт работы, методика преподавания геометрии.*

Главным (и по сути, единственным) неравенством в области действительных чисел является неравенство x2 ≥ 0-его верность сомнений не вызывает. Из него уже следуют другие, очень известные и употребительные неравенства, первым из которых, безусловно, является *неравенство Коши* или, как его ещё называют, неравенство о средних:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$ *для любых a, b ≥ 0*

Доказывается оно очень просто: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

Поскольку a + b ≥ 0, a – b≥ 0, значит неравенство можно возводить в квадрат:

(a + b)2 ≥ 4ab, a2 + 2ab + b2 ≥ 4ab, a2 + 2ab + b2 -4ab ≥ 0, a2 – 2ab + b2 ≥ 0

(a – b)2 ≥ 0

Таким образом, полученное неравенство верно для любых a, b, и в том числе при положительных.

Итак, исходное неравенство верно для любых a, b ≥ 0.

Существуют различные геометрические интерпретации доказанного неравенства. Рассмотрим одну из них:

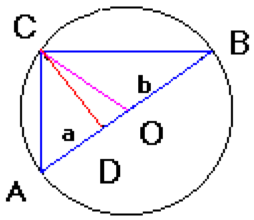

Рис. 1

Пусть дан прямоугольный треугольник ABC (угол C-прямой), где CD-высота, CO-радиус описанной окружности (см. рис. 1).

Обозначим AD = a, BD = b, CD = h, CO = r. Поскольку в прямоугольном треугольнике h2 = ab, то $h = \sqrt{ab}$.

Так как r-радиус описанной окружности, то по свойству прямоугольного треугольника имеем: $r = \frac{a+b}{2}$.

Понятно, что r ≥ h, притом данные отрезки совпадают, если треугольник ABC-равнобедренный. Таким образом, неравенство доказано: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Среднее гармоническое двух положительных чисел a и b равно отношению удвоенного произведения этих чисел к их сумме.

Если среднее гармоническое положительных чисел a и b обозначить буквой h, то можно записать: $h = \frac{2ab}{a+b}$ или $\frac{1}{h} = \frac{1/a + 1/b}{2}$.

Из такой записи видно, что величина, обратная среднему гармоническому a и b, есть среднее арифметическое величин, обратных a и b.

Докажем, что $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$;

$$ab \geq \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2};\ ab - \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \geq 0;\ \frac{ab(a+b)^2 - 4a^2b^2}{(a+b)^2} \geq 0;\ \frac{ab\left(a^2 + 2ab + b^2\right) - 4a^2b^2}{(a+b)^2} \geq 0;$$

$\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2} \geq 0;$

Итак, данное неравенство верно для положительных чисел a и b.

Заметим, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ и $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b};$

Следственно имеет место неравенство: $\frac{2ab}{a+b} \leq ab \leq \frac{a+b}{2}$.

Ещё в математике используется понятие среднего квадратичного: для двух положительных чисел a и b среднее квадратичное равно $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Покажем, что $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$; $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4};$

$2(a^2+b^2)-(a+b)^2 \geq 0;\ 2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2 \geq 0;\ a^2-2ab+b^2 \geq 0;$

$(a-b)^2 \geq 0;$

Итак, для любых положительных a и b всегда будет выполняться неравенство:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

Таким образом, все приведённые средние значения связаны неравенствами:

$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ для любых a, b > 0

При этом, знак равенства достигается лишь в том случае, когда a=b.

Геометрическую интерпретацию о средних положим на трапецию:

Пусть дана трапеция с основаниями a и b.

1. По теореме о средней линии трапеции отрезок MN, параллельный основаниям и соединяющий середины боковых сторон трапеции, равен *среднему арифметическому оснований:* $MN = \frac{a+b}{2}$.

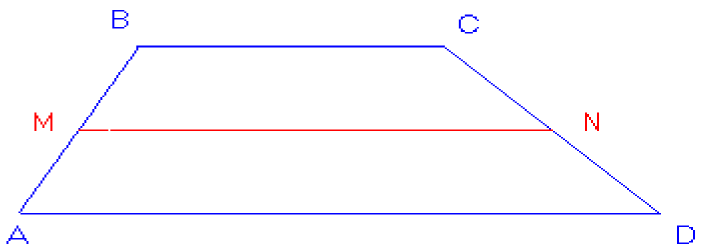

Рис. 2

2. *Отрезок KF, проходящий через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям, равен среднему гармоническому оснований:* $KF = \dfrac{2ab}{a+b}$.

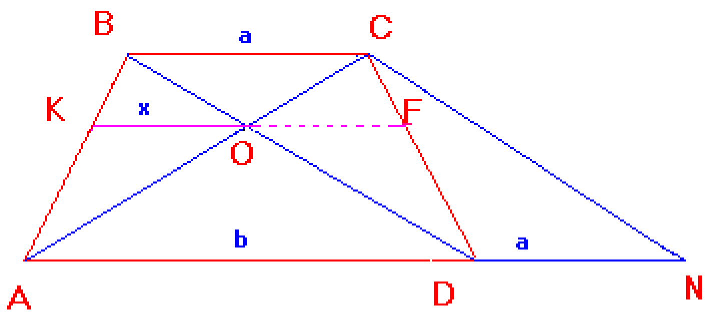

Рис. 3

Докажем данное свойство:

Пусть дана трапеция ABCD, где O-точка пересечения диагоналей. На сторонах AB и CD соответственно взяты точки K, F так, что отрезок KF проходит через точку O и параллелен основаниям трапеции. Пусть KO = x.

Проведём дополнительное построение: на продолжении стороны AD отложим отрезок DN так, что DN = BC.

Рассмотрим треугольники AOD и ACN. Они подобны по 2-ум углам. Из подобия следует пропорция: $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{b}{a+b}$.Треугольники ABC и AKO также подобны (по 2-ум углам). Из последнего следует пропорция: $\frac{x}{a}=\frac{AO}{AC}$.Из полученных равенств следует: $\frac{x}{a}=\frac{b}{a+b}$,т.е. $x=\frac{ab}{a+b}$.Аналогично находим OF, получаем KO = OF, т. е. $KF=\frac{2ab}{a+b}$.

3. *Если в трапеции провести отрезок, разбивающий её на две равновеликие трапеции, то этот отрезок есть среднее квадратичное оснований:* $EF=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

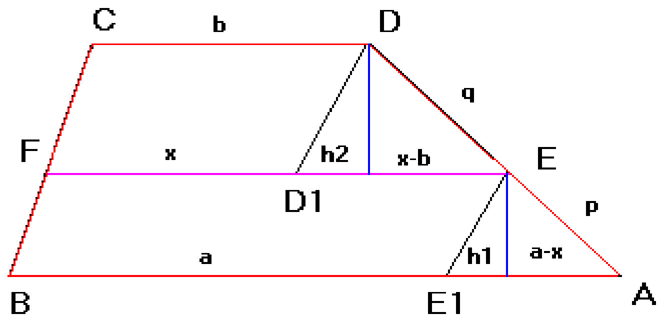

Рис. 4

Докажем это свойство.

Обозначим AE = p, ED = q, EF = x, h1 и h2-высоты равновеликих трапеций. По формуле $S_{тр}=\frac{h(a+b)}{2}$ имеем $\frac{h_1(a+x)}{2}=\frac{h_2(b+x)}{2}$; отсюда $\frac{h_1}{h_2}=\frac{x+b}{x+a}$; (3). Из подобия треугольников AEE1 и EDD1 следует: $\frac{h_1}{h_2}=\frac{p}{q}=\frac{a-x}{x-b}$; (4).

Приравнивая правые части равенств (3) и (4) имеем: $\frac{a-x}{x-b}=\frac{x+b}{a+x}$;

x2 – b2 = a2 + x2.

Итак, получаем $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

4. *Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим (чисел a и b) оснований трапеции.*

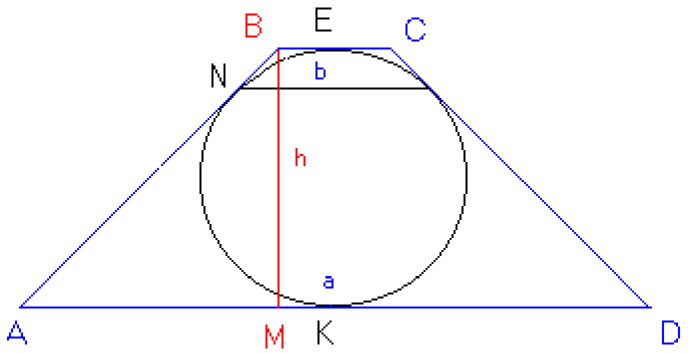

Рис. 5

Докажем, что h2 = ab, т. е. $h = \sqrt{ab}$.

$AM = \frac{a+b}{2}$, $AN = AK = \frac{a}{2}; BN = BE = \frac{b}{2}; AB = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2};$

По теореме Пифагора $BM = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4};$ т.е. $BM = \sqrt{ab};$

Из доказанного ранее $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$,для любых a, b > 0.

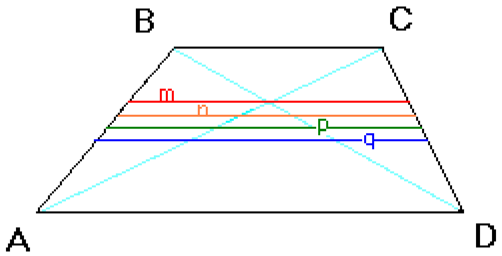

Рис. 6

Следовательно, в трапеции среднее геометрическое оснований трапеции расположено следующим образом:

где m-среднее гармоническое основание;

n – среднее геометрическое;

p – среднее арифметическое;

q – среднее квадратичное.

Следует отметить, что при различных значениях a и b последовательность этого расположения не меняется.

Применение рассмотренные мною неравенства находят в следующем:

– неравенства в математической статистике и экономике. задачи на оптимизацию;

– поиск наибольшего и наименьшего значений функции с помощью замечательных неравенств.

Список литературы

1. Балк М. Как же доказать это неравенство? / М. Балк, М. Мазалов // Квант. – 1995. – №6.

2. Башмаков М. Геометрические неравенства / М. Башмаков // Квант. – 1979. – № 2.

3. Берколайко С.Т. Использование неравенства Коши при решении задач / С.Т. Берколайко // Квант. – 1975. – №4.

4. Дорофеев Г.В. Математика для 9 класса средней школы / Г.В. Дорофеев. – М.: Дрофа, 2000.

5. Погорелов А.В. Геометрия, 7–11 класс / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 1993.

6. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах / И.Х. Сивашинский. – М.: Наука, 1989.