Черкасова Елена Викторовна
канд. техн. наук, доцент
Аксенова Ольга Анатольевна
д-р физ.-мат. наук, профессор
ВИ(ВМ) ВУНЦ ВМФ «ВМА»
г. Санкт-Петербург

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОТРАЖЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Аннотация: *в статье рассматривается моделирование как универсальный и эффективный метод научного познания. Автор раскрывает сущность моделирования, его функции (описательная, управленческая, оптимизационная, прогностическая) и классификацию моделей (фактографические, описательные, стационарные детерминированные, вероятностные). На многочисленных примерах из электротехники, навигации, химии, механики, термодинамики и теории управления показано применение математических моделей для решения прикладных задач. Отдельное внимание уделяется системам линейных алгебраических уравнений, дифференциальным уравнениям и имитационным моделям сложных технических систем. Делается вывод, что математическая модель позволяет анализировать, прогнозировать и оптимизировать поведение системы при обеспечении устойчивости и точности.*

Ключевые слова: *модель, моделирование, описательные модели, физический процесс, сложные технические системы, системы линейных алгебраических уравнений, обыкновенные дифференциальные уравнения.*

Одним из важнейших вопросов философии является вопрос о познании окружающего нас мира. Исходя из этих позиций, можно констатировать, что *моделирование* – эффективный и универсальный метод научного познания.

Как способ отражения действительности, моделирование зародилось фактически одновременно с развитием научного познания и играет особую роль в исследовании сложных процессов, явлений, систем, то есть таких объектов, где трудно использовать другие методы [1, 2]. Основа моделирования – процесс построения модели, цель которого – реализация связанных с объектами функций.

Примеры

1. Моделирование процесса расчета поправок при стрельбе реализует функцию описания.

2. Моделирование работы системы автоматического управления посадкой космического аппарата реализует функцию управления.

3. Моделирование процесса расчета курса самолета, обеспечивающего минимальное время полета с учетом его безопасности, характеристик самолета, метеорологических условий, реализует функцию оптимизации.

4. Моделирование боевой операции с учетом действующих сил и средств реализует функцию прогнозирования.

Каждый из видов моделей в зависимости от способа реализации информации допускает дальнейшую детализацию. Так, основным видом фактографической модели является модель, построенная на прогнозной экстраполяции.

Отличительная черта описательной модели – отсутствие в ней управления. Обычно такие модели предназначены для описания явлений (процессов), происходящих в естествознании и технике, поэтому *основным принципом*, положенным в основу *формирования описательных математических моделей*, является их *соответствие реальным физическим законам*.

Для построения моделей этого класса используется не только математический аппарат алгебраических и трансцендентных уравнений и систем (стационарные детерминированные модели), но и аппарат теории случайных событий, случайных величин, статистических выборочных и регрессионных зависимостей (стационарные вероятностные модели), а также случайных процессов (нестационарные вероятностные модели).

Решение широкого круга задач, относящихся к различным разделам математики, физики, электротехники и радиотехники, кораблевождения, тактики и других дисциплин можно привести к линейным алгебраическим системам, имеющим в силу этого большое практическое значение.

Примеры

1. При построении математической модели для определения контурных токов I_1 и I_2 в электрической цепи (рис.1), получаем систему двух линейных неоднородных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами, и нахождение токов сводится к решению этой системы.

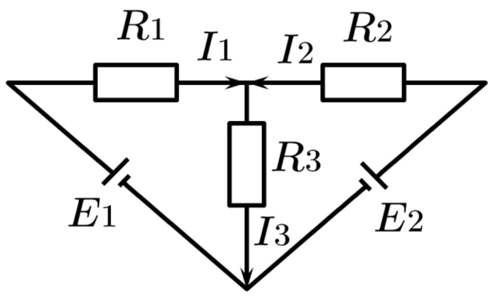

Рис.1.

Действительно, применяя второе правило Кирхгофа, будем иметь стационарную детерминированную модель, выраженную соотношениями

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_3)I_1-R_3I_2&=E_1;\\-R_3I_1+(R_2+R_3)I_2&=E_2\end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

где R_1, R_2, R_3 – сопротивления резисторов, E_1, E_2 – Э.Д.С. источников постоянного тока.

Таким образом, математическая модель для определения величины контурных токов I_1 и I_2- система (1) двух линейных неоднородных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами, решая которую относительно неизвестных I_1 и I_2, получим

$$\left.\begin{aligned}I_1&=\frac{E_1(R_1+R_3)+E_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3};\\I_2&=\frac{E_1R_3+E_2(R_1+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

2. Для нахождения поправок Δx и Δy к счислимым координатам корабля x_c и y_c рассматриваются уравнения двух линий положения:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x\cos\tau_1+\Delta y\sin\tau_1=n_1\\ \Delta x\cos\tau_2+\Delta y\sin\tau_2=n_2\end{array}\right\},$$

соответствующие измерениям двух зависимых навигационных параметров.

Пусть, например, для определения места корабля тремя способами измерены два навигационных параметра l_1 и l_2, содержащие случайные независимые погрешности, являющиеся функциями от поправок широты ($\Delta\varphi$) и долготы ($\Delta\omega$):

$$\left.\begin{array}{l}a_1\cdot\Delta\varphi+b_1\cdot\Delta\omega=l_1\\ a_2\cdot\Delta\varphi+b_2\cdot\Delta\omega=l_2\end{array}\right\}.$$

Требуется определить поправки к координатам $\Delta\varphi$ и $\Delta\omega$ при 3 способах измерений, если заданы соответствующие этим способам векторы правых частей $l'=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$; $l''=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$; $l'''=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$; $a_i, b_i, i=1,2$ – коэффициенты фиксированы. Выбрать метод решения.

Чтобы переписать систему в матричной форме $A\cdot X=B$, введем обозначения: $A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}; X=\begin{pmatrix}\Delta\varphi\\ \Delta\omega\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}$.

Так как при каждом из способов измерений меняется лишь матрица-столбец свободных членов *B*, а основная матрица системы *A* остается неизменной, то для решения целесообразно применить матричный метод, согласно которому $X=A^{-1}\cdot B$. Рассчитаем A^{-1}:

$$\det A=a_1b_2-b_1a_2;$$

$$A_{ij}=\begin{pmatrix}b_2 & -a_2\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix}; A^c=\left(A_{ij}\right)^T=\begin{pmatrix}b_2 & b_1\\ -a_2 & a_1\end{pmatrix}; A^{-1}=\frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}\begin{pmatrix}b_2 & b_1\\ -a_2 & a_1\end{pmatrix}.$$

Тогда при первом способе измерения вектор поправок равен:

$$X_1=\begin{pmatrix}\Delta\varphi_1\\ \Delta\omega_1\end{pmatrix}=\frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}\begin{pmatrix}b_2 & -b_1\\ -a_2 & a_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}\cdot\begin{pmatrix}-3b_1\\ 3a_1\end{pmatrix}.$$

Аналогично при втором способе измерения:

$$X_2=\begin{pmatrix}\Delta\varphi_2\\ \Delta\omega_2\end{pmatrix}=\frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}\begin{pmatrix}b_2 & -b_1\\ -a_2 & a_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}\cdot\begin{pmatrix}2b_2\\ -2a_2\end{pmatrix}.$$

И при третьем способе измерения:

$$X_3=\begin{pmatrix}\Delta\varphi_3\\ \Delta\omega_3\end{pmatrix}=\frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}\begin{pmatrix}b_2 & -b_1\\ -a_2 & a_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}\cdot\begin{pmatrix}-b_2-2b_1\\ a_2+2a_1\end{pmatrix}.$$

В скалярной форме результаты запишутся в виде

$$\Delta\varphi_1=\frac{-3b_1}{a_1b_2-b_1a_2};\qquad \Delta\omega_1=\frac{3a_1}{a_1b_2-b_1a_2},$$

$$\Delta\varphi_2=\frac{2b_2}{a_1b_2-b_1a_2};\qquad \Delta\omega_2=\frac{-2a_2}{a_1b_2-b_1a_2},$$

$$\Delta\varphi_3=\frac{-b_2-2b_1}{a_1b_2-b_1a_2};\qquad \Delta\omega_3=\frac{a_2+2a_1}{a_1b_2-b_1a_2}.$$

Сопоставление числителей позволяет выбрать оптимальный способ измерения.

3. В уравнениях реакций [6] *при подборе стехиометрических коэффициентов перед* формулами веществ *получают уравнения, учитывающие как химические свойства, так и закон сохранения массы веществ. Определяя соответствующие числовые значения методом неопределённых коэффициентов, приходят к системе линейных уравнений.*

Обобщением рассмотренных на примерах систем линейных алгебраических уравнений служат системы линейных алгебраических неравенств, тесно связанные с методами линейного программирования, основы которых были заложены работами выдающегося советского математика Л.В. Канторовича [3].

Однако достаточно широкие классы математических моделей не укладываются в рамки линейных задач. Примером могут служить обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), которые моделируют процессы, связанные с движением твердых тел, подчиняющихся законам классической механики. К ним относятся: движение корабля, в частности, его бортовая и килевая качка на регулярной волне; погружение глубинных бомб; движение торпед, самолетов, ракет и т. д.

Пример. Построить математическую модель для нахождения закона движения торпеды в вязкой среде с силой трения $\vec{R}$, пропорциональной квадрату скорости, и постоянной силой тяги $\vec{P}_0$ (рис. 2).

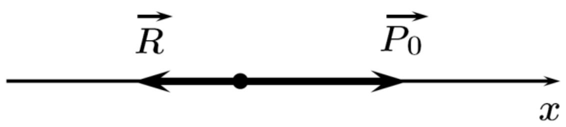

Рис. 2

Для построения математической модели движения считаем торпеду материальной точкой, расположенной на оси x, и используем уравнение второго закона Ньютона. В этом случае имеем

$$m \cdot \ddot{x}(t) = f(t), \tag{3}$$

где $f(t) = P_0 - \alpha \cdot \dot{x}^{\,2}(t)$.

Здесь α – коэффициент пропорциональности; P_0 – величина силы тяги. Получаем нелинейную нестационарную детерминированную модель, записанную в виде

$$m\ddot{x}(t) = P_0 - \alpha \cdot \dot{x}^{\,2}(t). \tag{4}$$

Уравнение (4) – нелинейное ОДУ второго порядка. Общее решение – закон движения торпеды – имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{P_0}{\alpha}}\left[\ln\frac{1 + C_1 e^{\beta t}}{|C_1|} - \beta t\right] + C_2, \tag{5}$$

где $\beta = \dfrac{2\sqrt{P_0\alpha}}{m}$; C_1, C_2 – произвольные постоянные.

При заданных начальных условиях, если известны начальное положение и начальная скорость материальной точки

$$x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

более детальный закон движения торпеды может быть получен из (5) конкретизацией C_1 и C_2. Итак, математическая модель движения торпеды описывается уравнением (4). Как было отмечено выше, построенная описательная модель в то же время позволяет прогнозировать положение объекта в любой момент времени $t > 0$.

При моделировании физических процессов, протекающих в сплошных средах, скажем, физических полей корабля, атмосферы, океана; волновых процессов; процессов распространения тепла и т. д. используются дифференциальные уравнения в частных производных, в том числе уравнения математической физики. Это уравнения Максвелла, основные уравнения термодинамики [4], уравнения Навье-Стокса, описывающие движение жидкости, уравнения Лапласа в теории упругости и т. д.

В *сложных технических системах* процесс выбора управления происходит на этапе проектирования, а функционирование самой системы осуществляется автоматически, без воздействия извне.

Примеры

1. Математическая модель *сложной технической управляемой системы* – модель паровой машины, регулируемой центробежным регулятором Д.Уатта, в котором механически воплощен принцип регулирования по отрицательной обратной связи – увеличение регулируемой величины вызывает действие, которое приводит к ее уменьшению, и наоборот.

Объект регулирования – паровая машина – состоит из трех главных блоков: парового котла, цилиндра, механической части. Четвертый блок – центробежный регулятор, который в совокупности с тремя предыдущими образует управляемую систему.

Используя известные законы механики и термодинамики [4], математическую модель управляемой системы (движения паровой машины, регулируемой центробежным регулятором), получим в виде:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{M_1}{J} + \frac{k}{J}(\cos\varphi - \cos\varphi^0) - \frac{M_2}{J}; \qquad (6)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{n^2\Omega}{2}\sin 2\varphi - \frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{b}{m}\sin^2\varphi \frac{d\varphi}{dt}, \qquad (7)$$

где Ω – угловая скорость вращения маховика;

φ – обобщенная угловая координата;

J, M_1, M_2 – соответственно моменты инерции маховика; силы, вращающей маховик; внешней нагрузки относительно оси вращения маховика;

g – ускорение силы тяжести;

l – параметр Кориолиса;

b, k, m, n – конструктивные параметры (соответственно коэффициенты трения и усиления; масса грузовика; передаточное число).

Для рационального выбора варианта системы управления необходимо изучить все возможные решения (6) и (7) при любых возможных комбинациях конструктивных параметров и внешних возмущений. В соответствии с приведенной классификацией подобные модели относятся к классу имитационных.

Исследования регулятора Уатта показали, что критерием оценки целесообразно выбрать общее качественное свойство асимптотической устойчивости управляемой системы в окрестности стационарного состояния Ω^0, φ^0. Для получения конкретных значений конструктивных параметров b, k, m, n, дающих асимптотическую устойчивость, был использован математический аппарат теории устойчивости А.М. Ляпунова [5].

2. Закон движения оси гирокомпаса при выключенном успокоителе колебаний (без демпфирования) имеет вид

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_m \sin\omega_0 t; \\ \beta = \beta_m - \beta_m \cos\omega_0 t, \end{cases} \qquad (8)$$

где α и β – соответственно, азимут и высота оси гирокомпаса;

ω_0 – частота ее собственных колебаний.

Какую кривую описывает при своем движении ось гироскопа?

Чтобы найти кривую, выразим из первого уравнения системы (8) $\sin\omega_0 t$, из второго – $\cos\omega_0 t$. Имеем

$$\sin\omega_0 t = \frac{\alpha}{\alpha_m};\ \cos\omega_0 t = \frac{\beta\ \ - \beta_m}{-\beta_m}.$$

Используем основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t = 1 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\alpha_m^2} + \frac{(\beta - \beta_m)^2}{\beta_m^2} = 1.$$

Сравнивая полученное уравнение с каноническим уравнением кривой второго порядка, видим, что кривая – эллипс с центром в точке $C(0, \beta_m)$ и полуосями $a = \alpha_m, b = \beta_m$.

Итак, ось гирокомпаса при своем движении описывает эллипс.

Отметим, что одна и та же математическая модель может описывать самые разнообразные явления и процессы. В частности, приведем ряд примеров практического использования эллипса.

1. *В картографии* при проектировании участков земной поверхности на плоскость возникают искажения. Для характеристики искажающих свойств карты вводится понятие *эллипса искажений* – бесконечно малого эллипса в каждой точке на карте, являющегося изображением бесконечно малого круга на земной поверхности.

2. *В теории стрельбы* вводится понятие *эллипса рассеивания* – кривой, внутри которой рассеиваются точки попадания снарядов, ракет и др. при стрельбе на плоскости со средними квадратичными отклонениями, пропорциональными полуосям эллипса.

3. *В кораблевождении* вводится понятие *эллипса погрешностей* – линии, на которой лежат концы случайной векторной погрешности определения места корабля, обладающие одинаковой вероятностью.

4. Первый закон Кеплера гласит, что орбиты планет есть эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце. Ньютон показал, что законы Кеплера в общем виде относятся ко всем космическим телам и действуют в любом поле тяготения и что эти законы должны учитывать массы и скорости тел. Формула для радиуса-вектора любой точки эллипса была выведена Ньютоном из закона всемирного тяготения в общем виде (как уравнение конического сечения с эксцентриситетом от 0 до ∞). Из нее следовало, что в центральном поле тяготения орбитами космических тел являются конические сечения: в зависимости от скорости движения тело может описывать эллипс, параболу или гиперболу. Эти закономерности распространяются и на движение искусственных спутников Земли (ИСЗ). В зависимости от скорости V, сообщаемой аппарату при запуске, орбиты ИСЗ могут быть круговыми, эллиптическими, параболическими или гиперболическими.

Большинство ИСЗ движутся по эллиптическим, близким к круговым орбитам, плоскости которых проходят через центр Земли.

5.Траектория управляемой баллистической ракеты состоит из двух частей: OA – активный участок; ABC – пассивный (после отключения двигателей), который представляет собой часть *эллипса* (рис. 3).

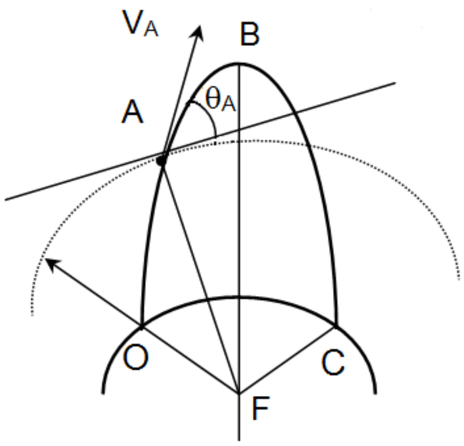

Рис. 3

Резюмируя все сказанное, можем констатировать, что математическая модель – это формализованное описание системы с помощью математических соотношений, отражающих её свойства, процессы функционирования и взаимосвязи элементов. Она строится путём анализа математической записи физических законов, описывающих поведение и взаимосвязи элементов системы, и позволяет анализировать, прогнозировать поведение системы, оптимизировать её параметры, дает возможность по заданным исходным данным найти значения интересующих исследователя параметров моделируемого объекта или явления.

По форме математическая модель, как правило, представляется системой уравнений (дифференциальных или алгебраических), которые могут быть линейными или нелинейными, причем одна и та же математическая модель может описывать самые разнообразные объекты и процессы. При моделировании сложных технических систем важно обеспечивать устойчивость модели и достижение необходимой точности при приемлемых затратах времени.

Список литературы

1. Данилов-Данильян В.И. Моделирование: системно-методический аспект / В.И. Данилов-Данильян, А.А. Рывкин. – М. : Наука, 1983.

2. Природа моделей и модели природы / под ред. Д.М. Гвишиани. – М. : Наука, 1986.

3. Математическая энциклопедия / под ред. И.М. Виноградова. – М. : Сов. энцикл., 1977.

4. Савельев И.В. Курс физики. Т. 1 / И.В. Савельев. – М. : Наука, 1989.

5. Кащенко С.А. Зоны устойчивости А.М. Ляпунова: Теория и приложения / С.А. Кащенко. – М. : URSS, 2024. – 192 с.

6. Подходова Н.С. Введение в моделирование. Математические модели в естествознании (биология, химия, экология): учеб. пособие / Н.С. Подходова, Е.М. Ложкина. – СПб. : Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2009. – 177 с. EDN QJJYFB