

Александрова Ксения Евгеньевна

заместитель директора, учитель

МБОУ «Новочебоксарский кадетский лицей»

г. Новочебоксарск, Чувашская Республика

ФРАКТАЛЫ – БЕСКОНЕЧНОСТЬ В МАТЕМАТИКЕ И ПРИРОДЕ

Аннотация: в статье рассматривается понятие фрактала и его основные свойства. На примерах математических моделей и природных объектов раскрывается принцип самоподобия, объясняется роль итераций в построении фрактальных фигур и показывается практическое значение фрактальной геометрии. Материал может быть использован на уроках математики в старших классах для расширения представлений учащихся о геометрии и межпредметных связях.

Ключевые слова: фрактал, фрактальная геометрия, самоподобие, итерация, множество Мандельброта, природа, математическое моделирование.

Введение.

Математика помогает увидеть закономерности в окружающем мире. Геометрические формы встречаются в архитектуре, технике, искусстве и природе. Однако далеко не все природные объекты похожи на идеальные окружности, треугольники или прямоугольники, изучаемые в школьном курсе. Очертания береговой линии, ветвление деревьев, форма облаков и структура снежинок гораздо сложнее. Для описания таких объектов математики используют понятие фрактала.

Фрактальная геометрия показывает, что сложная форма может возникать из сравнительно простого правила, которое многократно повторяется. Изучение фракталов позволяет связать школьные темы – геометрические преобразования, последовательности, функции и пределы – с современными научными идеями.

1. Что такое фрактал?

Термин «фрактал» получил распространение благодаря математике Бенуа Мандельброту во второй половине XX века. Он происходит от латинского fractus, что означает «дроблённый» или «раздробленный». Фракталом называют объект,

для которого характерно самоподобие: его части в определённом смысле напоминают весь объект.

Самоподобие бывает точным и приближённым. В математической модели отдельные части могут повторять форму целого по строгому правилу. В природе сходство обычно не абсолютно: маленькая веточка похожа на крупную ветвь, но не является её точной копией. Поэтому природные объекты часто называют статистически или приближённо самоподобными.

Важная особенность многих фракталов – наличие деталей на разных масштабах. Если увеличивать изображение, можно обнаружить новые структуры. При этом не следует понимать бесконечную детализацию буквально применительно к физическому миру: реальные объекты имеют ограничения, связанные с размером вещества, энергией и условиями среды.

2. Как строятся фракталы?

Один из способов построения фрактала – многократное повторение одного и того же действия, которое называют итерацией. Начинают с простого объекта, затем преобразуют его по заданному правилу и повторяют процесс для получившихся частей.

Рассмотрим снежинку Коха. Сначала берут отрезок. Его делят на три равные части, а среднюю треть заменяют двумя сторонами равностороннего треугольника, направленного наружу. Затем такое же действие выполняют с каждым получившимся отрезком. После нескольких шагов граница фигуры становится всё более изрезанной.

На каждой итерации каждый отрезок заменяется четырьмя отрезками, длина каждого из которых равна одной трети исходного. Поэтому общая длина линии на каждом шаге увеличивается в четыре трети раза. Если длина исходного отрезка равна L , то после n итераций суммарная длина равна $L \cdot (4/3)^n$. При неограниченном продолжении процесса длина границы стремится к бесконечности, хотя фигура остаётся в ограниченной области плоскости. Этот пример показывает, насколько необычными могут быть результаты простых геометрических правил.

Другой известный пример – треугольник Серпинского. Из равностороннего треугольника удаляют центральный треугольник, соединяя середины его сторон. Затем ту же операцию повторяют с тремя оставшимися треугольниками. После каждого этапа возникает всё более детальная структура с повторяющимися пустотами.

3. Фракталы в природе.

Фрактальные закономерности можно наблюдать во многих природных формах. Ветви деревьев разветвляются на более мелкие веточки, а те – на побеги. Подобная структура помогает растению распределять листья и получать доступ к свету. Кровеносные сосуды и бронхи также образуют разветвлённые сети, обеспечивающие перенос веществ и движение воздуха.

Рисунок папоротника демонстрирует приближённое самоподобие: маленькие листочки по форме напоминают весь лист. У брокколи романеско заметны повторяющиеся конусообразные элементы, состоящие из более мелких похожих элементов. У снежинок и некоторых кристаллических структур сложная форма также формируется в результате повторяющихся процессов роста.

К фрактальным объектам часто относят береговые линии, горные рельефы и облака. Их очертания выглядят по-разному в зависимости от масштаба наблюдения. Например, при измерении береговой линии с помощью короткой линейки можно учесть множество небольших изгибов, которые останутся незамеченными при использовании длинной линейки. Поэтому результат измерения зависит от выбранного масштаба.

При этом не каждый сложный или разветвлённый объект является строгим математическим фракталом. Природа создаёт формы под воздействием физических и биологических факторов, а фрактальные модели лишь описывают некоторые их особенности.

4. Множество Мандельброта и компьютерная графика.

Одним из наиболее известных математических фракталов является множество Мандельброта. Его изучают с помощью комплексных чисел и простого ите-

рационального правила: z следующего шага равно квадрату текущего z плюс выбранное комплексное число c . Начальное значение z обычно принимают равным нулю, а затем наблюдают, остаётся ли последовательность ограниченной или её значения быстро увеличиваются.

При вычислении для множества значений c компьютер отмечает точки, для которых последовательность не уходит в бесконечность. На экране возникает фигура с удивительно сложной границей. При увеличении отдельных участков обнаруживаются новые завитки и структуры, напоминающие исходное изображение.

Фракталы применяются в компьютерной графике для создания реалистичных изображений гор, облаков, берегов и других природных поверхностей. Фрактальные методы используются также при моделировании сложных сигналов, анализе изображений и исследовании процессов, в которых присутствуют закономерности на разных масштабах.

5. Фрактальная размерность.

В школьной геометрии размерность привычных объектов равна целому числу: точка имеет размерность ноль, линия – один, плоскость – два, пространство – три. Для некоторых фракталов используют дробную размерность, которая помогает количественно описать, насколько сложно объект заполняет пространство.

Для самоподобной фигуры, состоящей из N уменьшенных копий самой себя, каждая из которых уменьшена в масштабе в k раз, размерность самоподобия вычисляют по формуле $D = \log N / \log k$. Например, снежинка Коха на каждом шаге строится из четырёх частей, уменьшенных в три раза. Поэтому её размерность равна $\log 4 / \log 3$, то есть приблизительно 1,26.

Это значение больше единицы, поскольку фигура сложнее обычной линии, но меньше двух, поскольку она не заполняет всю плоскость. Формула показывает, как понятия логарифма и геометрической прогрессии помогают описывать объекты необычной структуры.

6. Значение фракталов для изучения математики.

Тема фракталов обладает значительным образовательным потенциалом. Она позволяет увидеть, как простые правила приводят к сложным результатам, и демонстрирует взаимосвязь различных разделов математики. При построении фракталов используются геометрические преобразования, подобие, последовательности, степени, логарифмы и элементы математического анализа.

Практическую работу можно организовать как небольшое исследование. Учащимся предлагается построить первые этапы треугольника Серпинского или снежинки Коха, подсчитать количество элементов на каждом шаге и выявить закономерность. Затем можно составить таблицу значений, сформулировать рекуррентное правило и проверить, как меняется длина границы или площадь фигуры.

Такой подход развивает математическую грамотность, навыки наблюдения, выдвижения гипотез и проверки результатов. Кроме того, фракталы дают возможность объединить математику с информатикой, биологией, географией и искусством.

Заключение.

Фракталы – яркий пример того, как математика помогает описывать сложность окружающего мира. Их главные признаки – самоподобие, повторение алгоритма и наличие структур на разных масштабах – позволяют изучать формы, которые трудно представить с помощью традиционной геометрии.

Математические фракталы, такие как снежинка Коха, треугольник Серпинского и множество Мандельброта, демонстрируют, что простое правило может порождать бесконечно сложную структуру. В природе встречаются приближённо фрактальные формы, возникающие в ходе роста и развития живых организмов, движения жидкостей и формирования рельефа.

Изучение фракталов делает математику более наглядной и показывает её практическую значимость. Эта тема помогает школьникам увидеть красоту математических закономерностей и понять, что за внешним разнообразием природных форм нередко скрываются повторяющиеся принципы.

Список литературы

1. Мандельброт, Б. Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Б. Мандельброт. – Москва : Институт компьютерных исследований, 2002.
2. Федер, Е. Фракталы / Е. Федер. – Москва : Мир, 1991. – 264 с.
3. Barnsley M.F. Fractals Everywhere / M.F. Barnsley. – 2nd ed. – Elsevier Science & Technology Books, 1993. – 531 p.
4. Falconer, K. J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications / K. J. Falconer. – Chichester : Wiley, 2014.
5. Weisstein, E. W. Mandelbrot Set / E. W. Weisstein // MathWorld – A Wolfram Web Resource. – URL: <https://mathworld.wolfram.com/MandelbrotSet.html> (дата обращения: 15.10.2026). – Текст : электронный.