ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Татьянкин Виталий Михайлович
ст. преподаватель
Тей Дмитрий Олегович
канд. техн. наук, доцент

ФГБОУ ВПО Югорский государственный университет
г. Ханты-Мансийск, ХМАО-Югра

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Аннотация*: в настоящее время существует множество методов решения задач целочисленного программирования для целевых функций с линейными ограничениями. Однако, такие методы не позволяют эффективно решать задачи с нелинейными ограничениями, например, в задаче оптимизации заказа на подготовку кадров. В статье предлагается численный метод решения одной задачи целочисленного программирования с нелинейными ограничениями.*

Ключевые слова*: нелинейное целочисленное программирование, численный метод.*

Введение

В Ханты-Мансийском автономном округе – Югре разработана система мониторинга и прогнозирования кадровых потребностей. Однако, актуальными остаются задачи: 1) планирования и прогнозирования приема, подготовки и выпуска профессиональных специалистов по укрупненным группам специальностей в учебных заведениях округа для реализации планируемых и прогнозируемых темпов выпуска ВРП с учетом миграции населения и вахтового метода работы 2) прогнозирование необходимого числа мигрантов с разными уровнями образования по группам специальностей. Решению этих вопросов посвящена настоящая работа.

Решение этих задач требует решения задачи целочисленного программирования для расчета оптимальных для региона контрольных цифр приема в учреждения высшего и среднего профессионального образования. Поиск оптимального решения, в свою очередь, формирует нелинейную целевую функцию, решение которой должны проводится на вычислительном кластере с минимальной вычислительной сложностью.

Численный метод решения задачи целочисленного программирования с нелинейными ограничениями

При распределении оптимального, с точки зрения экономики региона, заказа на подготовку кадров, учреждениям профессионального образования [1], требуется решить следующую задачу:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - P_i}{Z_i}\right)^2 \to min \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \leq S \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \leq A \end{cases}, \quad (1)$$

где X_i – заказ на подготовку кадров по i специальности, P_i – потребность экономики региона в специалистах, S – суммарный заказ на подготовку кадров с учётом финансовых возможностей, A – количество доступных абитуриентов.

Оптимальным решением задачи (1), будет ситуация, когда $X_i=P_i$, однако если решение $X_i=P_i$ не удовлетворяют ограничениям, то задача (1) сводится к следующей оптимизационной задаче:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{Z_i}\right)^2 \to min \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = E \end{cases}, \quad (2)$$

где: $E>0$, $\lambda_i>=0$, $Z_i>=1$, $Z_i<>Z_j$, E, λ_i– целые числа.

Рассмотрим следующею задачу:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\varphi_i}{X_i}\right)^2 \to min \\ \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i = E \end{cases}, \qquad (3)$$

где: φ_i>=0, i=1...n+1, X_j=Z_j j=1...n, φ_i– целые числа. Пусть φ_i^* - решение задачи (3), при этом существует такое X_{n+1} что φ_{n+1}^*=0. Доказательство. Рассмотрим ситуацию когда X_{n+1}→0: 1. если φ_{n+1}^*=0, то φ_{n+1}^*/X_{n+1}=0; 2. если φ_{n+1}^*<>0, то φ_{n+1}^*/X_{n+1}=∞. Так как X_j>=1, то для всех X_j и φ_j выполняется следующее условие:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\varphi_j}{X_j}\right)^2 + 0 < \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\varphi_j}{X_j}\right)^2 + \infty, \qquad (4)$$

что и требовалось доказать.

Соответственно если φ_i^* - решение задачи (2) и φ_{n+1}^*=0, то λ_j^*=φ_j^* (j=1...n) решение задачи (2).

Если φ_i^* - решение задачи (3) и φ_{n+1}^*=0, тогда должно выполнятся следующее условие:

$$\left(\frac{\varphi_j}{X_j}\right)^2 \le \left(\frac{\varphi_j - 1}{X_j}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_{n+1}}\right)^2 \qquad (5)$$

Выразим из (5) φ_j:

$$\left(\frac{\varphi_j}{X_j}\right)^2 \le \left(\frac{\varphi_j}{X_j}\right)^2 - \frac{2\varphi_j}{X_j^2} + \frac{1}{X_j^2} + \frac{1}{X_{n+1}^2} \qquad (6)$$

$$\varphi_j \le \beta_j * 0{,}5 + 0{,}5 \; \beta_j = \left(\frac{X_j}{X_{n+1}}\right)^2 \qquad (7)$$

Так как *φ_j целочисленное то максимально возможное φ_j:*

$$\varphi_j = F\big(\beta_j * 0{,}5 + 0{,}5\big) \; \beta_j = \left(\frac{X_j}{X_{n+1}}\right)^2 \qquad (8)$$

где F – функция округления вниз, иначе не выполнится условие (5).

Следовательно, для решения задачи (3), нужно подобрать такое X_{n+1} при котором

$$E = \sum_{j=1}^{n} F\big(\beta_j * 0{,}5 + 0{,}5\big) \; \beta_j = \left(\frac{X_j}{X_{n+1}}\right)^2, \qquad (9)$$

Тогда

$$\varphi_j^* = F(\beta_j * 0{,}5 + 0{,}5)\ \beta_j = \left(\frac{X_j}{X_{n+1}}\right)^2, \quad (10)$$

решение задачи (3), так как мы не можем варьировать φ_j^* *в силу условия (5),* а $\lambda_j^*=\varphi_j^*$ *(j=1...n) решение задачи (2).*

Для определения X_{n+1} *предложен следующий алгоритм:*

1. Определяем диапазон значение X_{n+1} *в котором находится решение:*

$$X_{n+1}^{\text{ниж}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2}{2E+n}},\ Z_{n+1}^{\text{верх}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2}{2E-n}}, \quad (11)$$

2. Получаем X_{n+1} *согласно следующему выражению:*

$$X_{n+1} = \frac{X_{n+1}^{\text{верх}} + X_{n+1}^{\text{ниж}}}{2}, \quad (12)$$

переходим к третьему шагу.

3. Если $E = \sum_{i=1}^{n} F(\beta_i * 0{,}5 + 0{,}5)\ \beta_i = \left(\frac{X_i}{X_{n+1}}\right)^2$, то алгоритм заканчивается. Если $E > \sum_{i=1}^{n} F(\beta_i * 0{,}5 + 0{,}5)\ \beta_i = \left(\frac{X_i}{X_{n+1}}\right)^2$, то $X_{n+1}^{\text{верх}} = X_{n+1}$, переходим ко второму шагу. Если $E < \sum_{i=1}^{n} F(\beta_i * 0{,}5 + 0{,}5)\ \beta_i = \left(\frac{X_i}{X_{n+1}}\right)^2$, то $X_{n+1}^{\text{ниж}} = X_{n+1}$, переходим ко второму шагу.

Апробация разработанного численного метода

Проведём численную апробацию предложенного алгоритма при разном количестве неизвестных. Для определения эффективности предложенного алгоритма сравним его с известным методом решения [4], а именно метод ветвей и границ. В таблице 1 представлены результаты численного эксперимента, а именно время вычисления каждого алгоритма в зависимости от количества искомых переменных. Численный эксперимент реализовался в среде Matlab, на ЭВМ со следующими характеристиками: процессор 2 ГГц, оперативная память 2 ГБ.

Таблица 1

Время выполнения алгоритмов в секундах

Количество неизвестных	100	1000	2000	4000	5000	7000	10000	100000	1000000
Предложенный алгоритм	0.00007	0.00066	0.0013	0.0025	0.0047	0.0056	0.0071	0.099	1.28
Метод ветвей и границ	0.0018	0.197	1.56	8.84	17.18	89.21	543.7	∞	∞

Как показывает анализ таблицы 1, время выполнения предложенного алгоритма линейно возрастает с увеличением количества неизвестных переменных. Вычислительная сложность существующего метода, минимальна, ограниченна $O(n^2)$ операций [5], при этом с количеством неизвестных более 10 тысяч, не представляется возможным провести расчёт на стандартных ЭВМ, так как не хватает ресурсов.

Заключение

В статье предложен алгоритм решения одной задачи целочисленного нелинейного программирования. Применение разработанного алгоритма, позволяет снизить время вычисления результатов и находить решения при большом количестве неизвестных, что подтверждается численной апробацией.

Список литературы

1. Карминская Т.Д., Тей Д.О., Татьянкин В.М., Русанов М.А. Формирование контрольных цифр приёма с учётом прогноза потребностей региональной экономики //Информационные системы и технологии г. Орёл, 2014, №1 (81). с. 30–38.

2. Болдырев В.И. Метод кусочно-линейной аппроксимации для решения задач оптимального управления // Дифференциальные уравнения и процессы управления г. Санкт – Петербург 2004, №1, с. 28–123.

3. Пантелеев А.В. Методы оптимизации. Практический курс: учебное пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Логос, 2011. – 424 с: ил.

4. Параллельный алгоритм целочисленного квадратичного программирования. http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=543. Дата обращения: 31.10.2014.

5. Лесиг В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации: Учебное пособие. 3-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань2, 2011. – 352 с.: ил. ISBN 978-5-8114-1217-4.