

## ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

*Никитин Андрей Витальевич*

аспирант

*Тихонов Сергей Владимирович*

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический

университет им. И.Я. Яковлева»

г. Чебоксары, Чувашская Республика

**УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ  
ТРАНСЛЯЦИОННО-АНИЗОТРОПНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ**

*Аннотация:* в статье рассматривается многослойная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления. Предполагается, что каждый слой обладает своими свойствами трансляционной анизотропии. Разработан алгоритм определения упруго-пластического состояния для произвольного числа слоев.

*Ключевые слова:* напряжение, пластичность, трансляционная анизотропия, труба, слой.

Трансляционная анизотропия впервые введена в работах [3] – [7]. В работе [8] рассмотрено упругопластическое состояние двуслойной трансляционно-анизотропной трубы. Предельное состояние слоистой трубы при наличии трансляционной анизотропии исследовалось в [11]. В [10] авторами изучено упругопластическое состояние трубы, неоднородность в которой сохраняет постоянное значение вдоль прямой. Случай, когда неоднородность в трансляционно-анизотропной трубе сохраняет постоянное значение вдоль эллиптических кривых рассмотрен в [12].

Рассмотрим многослойную толстостенную трубу, находящуюся под действием внутреннего давления  $p$  (рис. 1).

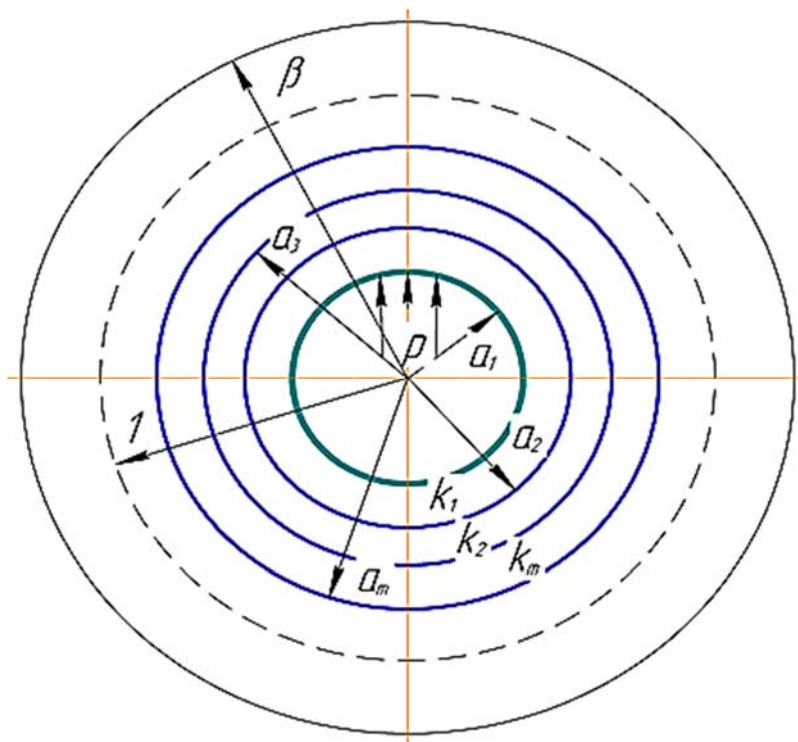


Рис. 1. Многослойная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления

Обозначим через  $a_1, a_2$  внутренний и внешний радиусы 1-го слоя, через  $a_2, a_3$  – внутренний и внешний радиусы 2-го слоя, через  $a_{n-1}, a_n$  – внутренний и внешний радиусы  $n$ -го слоя. С  $a_n$  по  $\beta$  слой – упругая область.

Условие предельного состояния для  $n$ -го слоя примем в виде:

$$\left( \frac{\sigma_{xn} - \sigma_{yn}}{2} - \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2} \right)^2 + (\tau_{xyn} - k_{3n})^2 = k_n^2, \quad k_{1n}, k_{2n}, k_{3n}, k_n - const, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

где  $\sigma_{xn}, \sigma_{yn}, \tau_{xyn}$  – компоненты напряжения в декартовой системе координат;  $k_{1n}, k_{2n}, k_{3n}$  – константы анизотропии.

В последующем все величины, которые имеют размерность напряжения, предполагаются безразмерными, отнесенными к величине предела текучести  $k$  и обозначим:

$$\frac{k_n}{k} = K_n, \quad \frac{p}{k} = q$$

Все величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу упругопластической зоны в нулевом приближении  $\rho_s^{(0)} = a_{n+1}$  и обозначим:

$$\frac{a_n}{\rho_s^{(0)}} = \alpha_n, \quad \frac{r}{\rho_s^{(0)}} = \rho$$

Связь между напряжениями в декартовой системе координат  $x, y$  и напряжениями в полярной системе координат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Перейдем к полярным координатам:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta \quad (3)$$

Из (2), (3) имеем условие пластичности в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{2} \right)^2 + (\tau_{\rho\theta n})^2 - 2R_n \left( \frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{2} \right) \cos(2\theta + \mu_n) - \\ - 2\tau_{\rho\theta n} R_n \sin(2\theta + \mu_n) + R_n^2 - K_n^2 = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$R_n = \sqrt{\left( \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2} \right)^2 + k_{3n}^2}, \quad \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2R_n} = \cos \mu_n, \quad \frac{k_{3n}}{R_n} = \sin \mu_n,$$

Предположим

$$k_{1n} = \delta k'_{1n}, \quad k_{2n} = \delta k'_{2n}, \quad k_{3n} = \delta k'_{3n}. \quad (5)$$

Обозначим, что  $R_n = \delta R'_n$ ,  $R'_n = \sqrt{\left( \frac{k'_{1n} - k'_{2n}}{2} \right)^2 + k'_{3n}^2}$ .

Положим, что искомое решение во всех  $n$  слоях пластической области зависит от некоторого параметра  $\delta$ , будем искать решение в виде:

$$\sigma_{ijn} = \sigma_{ijn}^{(0)} + \sigma_{ijn}^{(I)} \delta + \sigma_{ijn}^{(II)} \delta^2 + \dots \quad (6)$$

В исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние трубы:

$$\tau_{\rho\theta n}^{(0)} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Из (1), (6), (7) имеет место:

$$\sigma_{\rho n}^{(0)p} - \sigma_{\theta n}^{(0)p} = -2K_n \quad (8)$$

Из уравнения равновесия:

$$\frac{d\sigma_{\rho n}^{(0)p}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho n}^{(0)p} - \sigma_{\theta n}^{(0)p}}{\rho} = 0 \quad (9)$$

с учётом (7), (8) получим:

$$\sigma_{\rho n}^{(0)p} = 2K_n \ln \rho + C_n, \sigma_{\theta n}^{(0)p} = 2K_n + 2 \ln \rho + C_n, \quad (10)$$

Где  $C_n - \text{const}$ .

Из граничного условия на внутреннем контуре:

$$s_{r1}^{(0)p} \Big|_{r=a_1} = -q; s_{r1}^{(0)p} \Big|_{r=b} = 0 \quad (11)$$

а также (8), (9), (10) напряжения во внутренней пластической области I примут вид:

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = -q + 2K_1 \ln \frac{\rho}{\alpha_1}, \quad \sigma_{\theta 1}^{(0)p} = -q + 2K_1 + 2K_1 \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \quad (12)$$

Граничное условие на внутреннем контуре:

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha_2} = \sigma_{\rho 2}^{(0)p} \quad (13)$$

Из (9), (11), (13) получим во внешней пластической области II:

$$\sigma_{\rho 2}^{(0)p} = -q + 2K_2 \ln \frac{\rho}{\alpha_2} + 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \sigma_{\theta 2}^{(0)p} = -q + 2K_2 \left( 1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) + 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (14)$$

Используя условие сопряжения компонент напряжений на границе n-го слоя трубы:

$$\sigma_{\rho n}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha_n} = \sigma_{\rho_{n-1}}^{(0)p} \quad \tau_{\rho\theta n}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha_n} = \tau_{\rho\theta_{n-1}}^{(0)p} \quad (15)$$

можно найти предельное состояние в n-ом слое в нулевом приближении:

$$\sigma_{\rho n}^{(0)p} = -q + 2K_n \ln \frac{\rho}{\alpha_n} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} K_i \ln \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \quad \sigma_{\theta n}^{(0)p} = -q + 2K_n \left( 1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} K_i \ln \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \quad (16)$$

Решение в упругой области в нулевом приближении будем искать в виде:

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = A - \frac{B}{\rho^2}; \sigma_{\theta}^{(0)e} = A + \frac{B}{\rho^2}; \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (17)$$

Условия сопряжения компонент напряжений на упруго-пластической границе имеют вид:

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}^{(0)e}; \sigma_{\theta}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\theta}^{(0)e}. \quad (18)$$

Из (18) согласно (11), (12) получим напряжения в упругой зоне в нулевом приближении:

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = \frac{q + 2K_n \ln \alpha_n}{\beta^2 - 1} \left( 1 - \frac{\beta^2}{\rho^2} \right); \sigma_{\theta}^{(0)e} = \frac{q + 2K_n \ln \alpha_n}{\beta^2 - 1} \left( 1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right); \quad (19)$$

Из (4), (5), (7), (8) в первом приближении имеем:

$$\sigma'_{\theta n} - \sigma'_{\rho n} = -2(R'_n \cos(2\theta + \mu_n)) \quad (20)$$

Положим, что:

$$\sigma_{\rho}^{(I)p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(I)p} = \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(I)}}{\partial \theta} \right) \quad (21)$$

Из (20), (21) имеет место

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \theta^2} = -2R'_n \rho^2 \cos(2\theta + \mu_n). \quad (22)$$

Решение уравнения (22) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$\Phi_n^{(I)} = \Phi_n^{(I)} \text{ одн} + \Phi_n^{(I)} \text{ частн.} \quad (23)$$

Решая (23) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho n}^{(I)p} &= \frac{\left[ \left( -3C_{21}^{(n)} + \sqrt{3}C_{22}^{(n)} \right) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \left( -\sqrt{3}C_{21}^{(n)} - 3C_{22}^{(n)} \right) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right] \cos(2\theta)}{\rho} + \\ &\frac{\left[ \left( -3\bar{C}_{21}^{(n)} + \sqrt{3}\bar{C}_{22}^{(n)} \right) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \left( -\sqrt{3}\bar{C}_{21}^{(n)} - 3\bar{C}_{22}^{(n)} \right) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right] \sin(2\theta)}{\rho} + R'_n \cos(2\theta + \mu_n), \\ \sigma_{\theta n}^{(I)p} &= \frac{\left[ \left( -3C_{21}^{(n)} + \sqrt{3}C_{22}^{(n)} \right) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \left( -\sqrt{3}C_{21}^{(n)} - 3C_{22}^{(n)} \right) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right] \cos(2\theta)}{\rho} + \\ &\frac{\left[ \left( -3\bar{C}_{21}^{(n)} + \sqrt{3}\bar{C}_{22}^{(n)} \right) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \left( -\sqrt{3}\bar{C}_{21}^{(n)} - 3\bar{C}_{22}^{(n)} \right) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right] \sin(2\theta)}{\rho} - R'_n \cos(2\theta + \mu_n), \end{aligned}$$

$$\tau_{\rho\theta n}^{(I)p} = \frac{\left[ \left( 2\sqrt{3}C_{22}^{(n)} \right) \cos\left(\sqrt{3} \ln \rho\right) - \left( 2\sqrt{3}C_{21}^{(n)} \right) \sin\left(\sqrt{3} \ln \rho\right) \right] \sin(2\theta)}{\rho} + \frac{\left[ \left( -2\sqrt{3}\bar{C}_{22}^{(n)} \right) \cos\left(\sqrt{3} \ln \rho\right) + \left( 2\sqrt{3}\bar{C}_{21}^{(n)} \right) \sin\left(\sqrt{3} \ln \rho\right) \right] \cos(2\theta)}{\rho} - R'_n \sin(2\theta + \mu_n), \quad (24)$$

В первом приближении граничные условия на внутреннем контуре трубы согласно [1] имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_1} &= 0, \\ \tau_{\rho\theta_1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_1} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Предельное состояние во внутренней области I будет определяться из (24), (25):

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_1}^{(I)p} &= -R'_1 \left( \frac{\alpha_1}{\rho} \left( \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1}\right) \right) - 1 \right) \cos(2\theta + \mu_1), \\ \sigma_{\theta_1}^{(I)p} &= -R'_1 \left( \frac{\alpha_1}{\rho} \left( \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1}\right) \right) + 1 \right) \cos(2\theta + \mu_1), \\ \tau_{\rho\theta_1}^{(I)p} &= R'_1 \left( \frac{\alpha_1}{\rho} \left( \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1}\right) \right) - 1 \right) \sin(2\theta + \mu_1). \end{aligned} \quad (26)$$

Запишем (26) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_1}^{(I)p} &= a_1^1 \cos(2\theta) + a_2^1 \sin(2\theta) \\ \sigma_{\theta_1}^{(I)p} &= b_1^1 \cos(2\theta) + b_2^1 \sin(2\theta), \\ \tau_{\rho\theta_1}^{(I)p} &= c_1^1 \cos(2\theta) + c_2^1 \sin(2\theta), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} a_1^1 &= -R_1^{(I)} \left( \frac{\alpha_1}{\rho} \left( \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1}\right) \right) - 1 \right) \cos(\mu_1), \\ a_2^1 &= R_1^{(I)} \left( \frac{\alpha_1}{\rho} \left( \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1}\right) \right) - 1 \right) \sin(\mu_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1^1 &= -R_1' \left( \frac{\alpha_1}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) + 1 \right) \cos(\mu_1), \\
 b_2^1 &= R_1' \left( \frac{\alpha_1}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) + 1 \right) \sin(\mu_1), \\
 c_1^1 &= R_1' \left( \frac{\alpha_1}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \right) \sin(\mu_1), \\
 c_2^1 &= R_1' \left( \frac{\alpha_1}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) + 1 \right) \cos(\mu_1).
 \end{aligned}$$

Условия сопряжения компонент напряжений на границе слоев трубы имеют вид:

$$\sigma_{\rho_1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_2} = \sigma_{\rho_2}^{(I)p}, \quad \tau_{\rho\theta_1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_2} = \tau_{\rho\theta_2}^{(I)p} \quad (28)$$

Из (24), (26), (28) получаем предельное состояние во II пластической области:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho_{II}}^{(I)p} &= a_1^2 \cos(2\theta) + a_2^2 \sin(2\theta) \\
 \sigma_{\theta_{II}}^{(I)p} &= b_1^2 \cos(2\theta) + b_2^2 \sin(2\theta), \\
 \tau_{\rho\theta_{II}}^{(I)p} &= c_1^2 \cos(2\theta) + c_2^2 \sin(2\theta),
 \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_1^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [b_1^1 + R_2' \cos(\mu_2)] \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) + \right. \\
 &+ [a_1^1 - R_2' \cos(\mu_2)] \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) \Bigg\} + \\
 &\quad + R_2' \cos(\mu_2), \\
 a_2^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [b_2^1 + R_2' \sin(\mu_2)] \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) + \right. \\
 &+ [a_2^1 + R_2' \cos(\mu_2)] \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) \Bigg\} - \\
 &\quad - R_2' \sin(\mu_2), \\
 b_1^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [c_1^1 + R_2' \cos(\mu_2)] \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) + \right. \\
 &+ [c_1^1 - R_2' \cos(\mu_2)] \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) \Bigg\} - \\
 &\quad - R_2' \cos(\mu_2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [c_2^1 + R_2' \sin(\mu_2)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + \right. \\
 &+ [c_2^1 + R_2' \sin(\mu_2)] \left[ \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) \right] + \\
 &\quad \left. + R_2' \sin(\mu_2) \right\}, \\
 c_1^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [a_2^1 + R_2' \sin(\mu_2)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + \right. \\
 &+ [b_2^1 + R_2' \sin(\mu_2)] \left[ \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) \right] - \\
 &\quad \left. - R_2' \sin(\mu_2) \right\}, \\
 c_2^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [a_2^1 - R_2' \cos(\mu_2)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + \right. \\
 &+ [b_2^1 + R_2' \cos(\mu_2)] \left[ \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) \right] - \\
 &\quad \left. - R_2' \cos(\mu_2) \right\}.
 \end{aligned}$$

Аналогично из условия сопряжения компонент напряжений на границе n-го слоя трубы:

$$\sigma_{\rho_n}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_n} = \sigma_{\rho_{n-1}}^{(I)p}, \quad \tau_{\rho\theta_n}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_n} = \tau_{\rho\theta_{n-1}}^{(I)p} \quad (30)$$

можно найти предельное состояние в n-ом слое:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho_n}^{(I)p} &= a_1^n \cos(2\theta) + a_2^n \sin(2\theta) \\
 \sigma_{\theta_n}^{(I)p} &= b_1^n \cos(2\theta) + b_2^n \sin(2\theta), \\
 \tau_{\rho\theta_n}^{(I)p} &= c_1^n \cos(2\theta) + c_2^n \sin(2\theta), \\
 a_1^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [b_1^{n-1} + R_n' \cos(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
 &+ [a_1^{n-1} - R_n' \cos(\mu_n)] \left[ \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right] + \\
 &\quad \left. + R_n' \cos(\mu_n) \right\}, \\
 a_2^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [b_2^{n-1} + R_n' \sin(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
 &+ [a_2^{n-1} + R_n' \cos(\mu_n)] \left[ \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right] - \\
 &\quad \left. - R_n' \sin(\mu_n) \right\},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 b_1^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [c_1^{n-1} + R'_n \cos(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
 &+ [c_1^{n-1} - R'_n \cos(\mu_n)] \left[ \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right] - \\
 &\quad \left. - R'_n \cos(\mu_n), \right. \\
 b_2^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [c_2^{n-1} + R'_n \sin(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
 &+ [c_2^{n-1} + R'_n \sin(\mu_n)] \left[ \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right] + \\
 &\quad \left. + R'_n \sin(\mu_n), \right. \\
 c_1^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [a_2^{n-1} + R'_n \sin(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
 &+ [b_2^{n-1} + R'_n \sin(\mu_n)] \left[ \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right] - \\
 &\quad \left. - R'_n \sin(\mu_n), \right. \\
 c_2^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [a_2^{n-1} - R'_n \cos(\mu_n)] \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) + \right. \\
 &+ [b_2^{n-1} + R'_n \cos(\mu_n)] \left[ \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n}\right) \right] - \\
 &\quad \left. - R'_n \cos(\mu_n). \right.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Согласно [1] в упругой области будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \sigma_\rho^{(I)e} &= \frac{1}{2N} \{ 2(1 - 2\beta^2 + \beta^4) + 2(3 - 2\beta^2 - \beta^4) \rho^{-4} + 4(1 - 2\beta^{-2} + \beta^4) \rho^{-2} \} \cdot \\
 &\cdot (a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta)) + \frac{1}{2N} \{ (-4 + 4\beta^2) + (0 + 4\beta^4 - 4\beta^2) \rho^{-4} + (4 - 0\beta^{-2} - 4\beta^4) \rho^{-2} \} \cdot \\
 &\quad \cdot (-a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta)); \\
 \sigma_\theta^{(I)e} &= \frac{1}{2N} \{ 2(-1 + 2\beta^2 - \beta^4) + 2(-3 + 2\beta^2 + \beta^4) \rho^{-4} + 4(-3 + 2\beta^{-2} + \beta^4) \rho^2 \} \cdot \\
 &\cdot (a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta)) + \frac{1}{2N} \{ (4 - 4\beta^2) + (4\beta^2 - 4\beta^4) \rho^{-4} + (12 - 16\beta^{-2} + 4\beta^4) \rho^2 \} \cdot \\
 &\quad \cdot (-a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta)); \\
 \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \frac{1}{2N} \{ 2(-1 + 2\beta^2 - \beta^4) + 2(3 - 2\beta^2 - \beta^4) \rho^{-4} + 2(-3 + 2\beta^{-2} + \beta^4) \rho^2 + 2(1 - 2\beta^{-2} + \beta^4) \rho^{-2} \} \cdot \\
 &\cdot (a_2'' \sin(2\theta) - b_2'' \cos(2\theta)) + \frac{1}{2N} \{ (4 - 4\beta^2) + (-4\beta^2 + 4\beta^4) \rho^{-4} + (6 - 8\beta^{-2} + 2\beta^4) \rho^2 + (2 - 2\beta^4) \rho^{-2} \} \cdot \\
 &\quad \cdot (a_2''' \cos(2\theta) - b_2''' \sin(2\theta)),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_2'' &= -R'\alpha \cos \mu \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) + R' \cos \mu; \\
 b_2'' &= R'\alpha \sin \mu \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - R' \cos \mu; \\
 a_2''' &= R'\alpha \sin \mu \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - R' \sin \mu; \\
 b_2''' &= R'\alpha \cos \mu \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - R' \cos \mu.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Результирующее напряжение в упругой области в первом приближении имеет вид(32). Таким образом упруго-пластическое состояние многослойной трубы полностью определяется из соотношений (16), (19), (31), (32).

### ***Список литературы***

1. Ивлев, Д.Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д.Д. Ивлев, Л.В. Ершов. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
2. Ивлев, Д.А. О предельном состоянии слоистых круговых цилиндров из анизотропного материала под действием внутреннего давления / Д.А. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (66). – С. 57–63.
3. Ивлев, Д.Д. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д.Д. Ивлев, Б.Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 60–62.
4. Ивлев, Д.Д. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации / Д.Д. Ивлев, Л.А. Максимова, Б.Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 63–65.
5. Ивлев, Д.Д. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса / Д.Д. Ивлев, Л.А. Максимова, С.В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 66–69.

6. Ивлев, Д.Д. Вопросы теории идеальнопластической трансляционной анизотропии / Д.Д. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 101–106.

7. Ивлев, Д.Д. К теории идеальной трансляционной пластической анизотропии / Д.Д. Ивлев, Л.А. Максимова, Б.Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 107–110.

8. Кержаев, А.П. Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии / А.П. Кержаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 2 (16). – С. 71–81.

9. Максимова, Л.А. Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / Л.А. Максимова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 91–95.

10. Никитин, А.В. Предельное состояние слоистой трансляционно-анизотропной трубы / А.В. Никитин, С.В. Тихонов // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. – 2014. – № 2 (16). – С. 101–104.

11. Никитин, А.В. Упругопластическое состояние трансляционно-анизотропной линейно-неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / А.В. Никитин, С.В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Естественные и Технические науки. – 2013. – № 4 (80). – С. 148–155.

12. Никитин, А.В. Влияние нелинейной неоднородности материала на упругопластическое состояние толстостенной трубы под воздействием внутреннего давления при трансляционной анизотропии / А.В. Никитин, С.В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Естественные и Технические науки. – 2013. – № 4 (80). – С. 137–147.

13. Тихонов, С.В. О двусосном растяжении плоскости из упругопластического неоднородного материала / С.В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 161–168.