ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Кузнецов Сергей Аркадьевич
канд. физ.-мат. наук, доцент, старший научный сотрудник
ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
г. Казань, Республика Татарстан

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Аннотация: *для контактных задач теории пластин и оболочек, сводящихся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, разработан численно-аналитический метод их решения путем преобразования к краевой задаче для вспомогательной функции, связанной с искомыми контактными напряжениями простыми дифференциальными соотношениями. Дифференциальные уравнения при этом имеют тот же вид, что и уравнения для функции влияния, а краевые условия получаются в виде криволинейных интегралов по границе области контакта.*

Ключевые слова: *теория пластин и оболочек, контактная задача, интегральное уравнение Фредгольма, численно-аналитический метод, краевая задача, контактные напряжения.*

Несмотря на значительные успехи, достигнутые в применении численных методов (особенно метода конечных элементов) к решению задач механики контактного взаимодействия, по-прежнему сохраняется актуальность разработки эффективных методик, сочетающих строгость аналитических методов и мощь современных ЭВМ. Эти методики и полученные с их помощью результаты важны и для развития численных методов, так как позволяют создать наборы специальных тестов для отладки и подтверждения достоверности алгоритмов и программ, основанных на численных методах.

Сведение интегрального уравнения к краевой задаче

Как известно [2, 7], постановка контактных задач для тонкостенных элементов конструкций, основанная на гипотезах Кирхгофа-Лява, приводит к решению математически некорректных задач. Математическая некорректность проявляется в хорошо известных специалистам физических противоречиях: при гладкой форме объектов появляются разрывы на границе области контакта в напряжениях, усилиях и моментах; точечному контакту соответствует ненулевая реакция взаимодействия; невозможно удовлетворить нулевому условию для напряжения на границе области контакта для объекта, не имеющего угловой точки и т. д. Учет поперечного сдвига в той или иной форме позволяет устранить часть этих противоречий, но не все. Учет в зоне контакта сжимаемости нормали к срединной поверхности [3, 4, 5] позволяет получить контактные напряжения, мало отличающиеся от напряжений, вычисляемых по точным уравнениям теории упругости.

Для контактных задач без учета касательного взаимодействия между телами наиболее простой и одновременно достаточно строгий способ учета поперечного обжатия состоит в построении функции влияния как суперпозиции функции влияния, полученной (для изотропных оболочек) по теории Кирхгофа-Лява или (для анизотропных оболочек) по какой-либо уточненной теории и дающей перемещения оболочки в результате изгиба и растяжения, и функции влияния для слоя постоянной толщины, характеризующей местную деформацию элемента, его сжимаемость в поперечном направлении [1]. Сформулировав согласно этой постановке условие контакта оболочки и жесткого штампа в перемещениях, мы сведем проблему определения контактного давления $\sigma(x, y)$ к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varepsilon\sigma(x, y) + \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta)\sigma(\xi, \eta)d\xi d\eta = f(x, y), (x, y) \in \Omega \qquad (1.1)$$

Здесь Ω – область контакта, ε – коэффициент обжатия, $f(x,y)$ – функция формы и жесткого смещения штампа и оболочки, $G(x,y,\xi,\eta)$ – функция влияния, удовлетворяющая уравнению

$$LG(x, y, \xi, \eta) = L_1\delta(x - \xi, y - \eta), \qquad (1.2)$$

где L, L_1 – дифференциальные операторы, $\delta(x, y)$ – дельта-функция Дирака и соответствующим краевым условиям.

Если форма штампа гладкая и область контакта заранее неизвестна, то к уравнению (1.1) необходимо добавить естественное условие непрерывности контактного давления на границе контакта Г

$$\sigma(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma \tag{1.3}$$

Постоянные жесткого смещения определяются из условий статического равновесия.

Подействуем оператором L на уравнение (1.1)

$$\varepsilon L\sigma(x, y) + \iint_{\Omega} LG(x, y, \xi, \eta)\, \sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta = Lf(x, y) \tag{1.4}$$

Введем новую неизвестную функцию $U(x,y)$

$$L_1 U(x, y) = f(x, y) - \varepsilon\sigma(x, y) \tag{1.5}$$

$$\sigma(x, y) = LU(x, y) \tag{1.6}$$

Тогда из (1.4) следует уравнение

$$\varepsilon LU(x, y) + L_1 U(x, y) = f(x, y) \tag{1.7}$$

Подставим (1.5) и (1.6) в уравнение (1.1), получим

$$\iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta)\, L_{\xi,\eta} U(\xi, \eta) d\Omega = L_1 U(x, y) \tag{1.8}$$

Для ряда теорий тонких оболочек, используемых в настоящее время, оператор L представим в виде

$L = \nabla^4 + \alpha_1 \nabla^2 + \alpha_2$,

где ∇^2 – оператор Лапласа, α_1, α_2 – постоянные.

Пусть область контакта многосвязна. Без ограничения общности дальнейшие построения можно провести для двусвязной области (рис. 1).

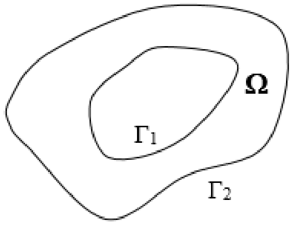

Рис. 1. Двусвязная область контакта

Разрежем мысленно область контакта Ω вдоль некоторой линии S, соединяющей внутреннюю Γ_1 и внешнюю Γ_2 границы Ω.

К получившейся односвязной области можно применить [8] формулу Грина

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

и следствия из нее

$$\iint_{\Omega} P\nabla^2 Q d\Omega = -\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial y}\right) d\Omega + \int_{\Gamma} P\frac{\partial Q}{\partial n} ds$$

$$\iint_{\Omega} (P\nabla^2 Q - Q\nabla^2 P) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(P\frac{\partial Q}{\partial n} - Q\frac{\partial P}{\partial n}\right) ds,$$

n – внешняя нормаль к Γ – границе односвязной области.

Интегралы по линии S берутся дважды: в прямом и обратном направлении, они взаимно уничтожатся, и (1.8) преобразуется к

$$\iint_{\Omega} LG(x,y,\xi,\eta)U(\xi,\eta)d\Omega + \oint_{\Gamma_1} \Psi[G,U]d\Gamma - \oint_{\Gamma_2} \Psi[G,U]d\Gamma = L_1 U(x,y) \tag{1.9}$$

где

$$\Psi[G,U] \equiv (\nabla^2 + \alpha_1)G(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial n} + G(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial \nabla^2 U(\xi,\eta)}{\partial n} -$$
$$-U(\xi,\eta)\frac{\partial \nabla^2 G(x,y,\xi,\eta)}{\partial n} - (\nabla^2 + \alpha_1)U(\xi,\eta)\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial n}.$$

В силу симметрии функции влияния по переменным x, y и ξ, η с учетом фильтрующих свойств δ-функции

$$\iint_{\Omega} LG(x,y,\xi,\eta)U(\xi,\eta)d\Omega \equiv L_1 U(x,y)$$

и (1.9) принимает вид

$$\oint_{\Gamma_1} \Psi[G,U]d\Gamma - \oint_{\Gamma_2} \Psi[G,U]d\Gamma = 0 \tag{1.10}$$

Таким образом, проблема решения интегрального уравнения (1.1) сведена к решению краевой задачи (1.7), (1.10). Основное отличие от одномерных контактных задач [8, 9] заключается в том, что краевое условие записано в виде контурного интеграла по границе области контакта.

Данный подход применим не только к статическим, но и к динамическим контактным задачам теории пластин и оболочек.

Список литературы

1. Артюхин, Ю.П. Одномерные контактные задачи теории оболочек [Текст] / Ю.П. Артюхин // Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 3. – С. 55–65.

2. Артюхин, Ю.П. Применение уточненной теории оболочек при решении контактных задач [Текст] / Ю.П. Артюхин, С.Н. Карасев // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – С. 132–153.

3. Блох, М.В. К выбору модели в задачах о контакте тонкостенных тел [Текст] / М.В. Блох // Прикл. механика, т. 13, 1977, вып. 5. – С. 34–42.

4. Григолюк, Э.И. Цилиндрический изгиб пластины жесткими штампами [Текст] / Э.И. Григолюк, В.М. Толкачев // ПММ, т. 39, 1975, вып. 5. – С. 876–883.

5. Карасев, С.Н. Влияние поперечного сдвига и обжатия на распределение контактных напряжений [Текст] / С.Н. Карасев, Ю.П. Артюхин // – Исследования по теории пластин и оболочек. Вып. 12. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1976. – С. 68–76.

6. Коноплев, Ю.Г. Исследование контактного взаимодействия прямоугольной пластины с жесткой накладкой при гармонических колебаниях [Текст] / Ю.Г. Коноплев, С.А. Кузнецов, А.А. Саченков, М.А. Саченков // Учён. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 2011, т. 153, кн. 4. – С. 98–111.

7. Попов, Г.Я. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами [Текст] / Г.Я. Попов, В.М. Толкачев // Изв. АН СССР, МТТ, 1980, № 4. – С. 192–206.

8. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3 [Текст] / Г.М. Фихтенгольц // М.: «Наука», Главная редакция физ.-мат. литературы, 1970. – 656 с.

9. Шишова, А.Н. Контактное взаимодействие пластины с жестким штампом при неизвестной области контакта [Текст] / А.Н. Шишова, С.А. Кузнецов // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук, 2013, выпуск 8. – С. 25–30.