Автор:
Балакшина Анна Александровна
ученица 9 «А» класса
МОУ «Гимназия № 12»
г. Волгоград, Волгоградская область
Руководитель:
Данелян Сусанна Амирбековна
учитель математики, заслуженный учитель РФ
МОУ «Гимназия № 12»
г. Волгоград, Волгоградская область

Применение дополнительного построения при решении задач планиметрии

Математика в огромной степени помогает научиться логически мыслить. Умению мыслить в первую очередь способствуют задачи наглядного характера– задачи планиметрии. При решении геометрических задач главную роль играет рисунок, который помогает создать геометрический образ по словесному описанию.

В планиметрии существует целый класс задач, к которым либо вовсе не применимы традиционные методы, либо решение традиционным способом слишком сложное и громоздкое. Во многих случаях решать подобные задачи помогает введение дополнительных линий в чертеж – дополнительное построение. Так чертеж данной фигуры можно достраивать до фигуры другого типа, можно с помощью дополнительного построения выделять на чертеже подобные или равные фигуры, связывать с фигурой окружность.

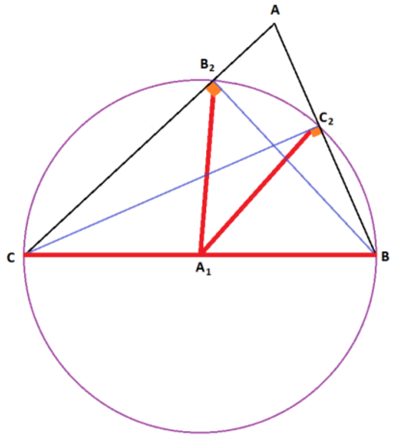
Использование дополнительных построений можно рассматривать как отдельный метод решения планиметрических задач. Суть этого метода заключается в том, что чертеж к задаче дополняется новыми элементами, после чего связи между данными и искомыми величинами становится легче увидеть.

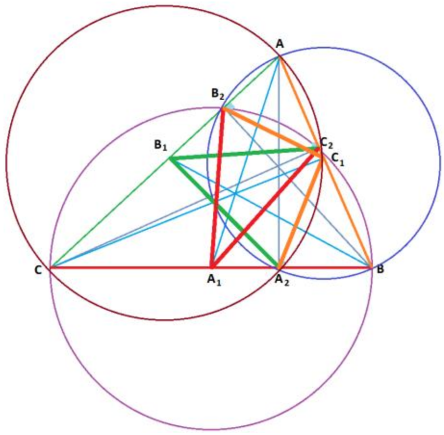
Есть задачи, в которых дополнительное построение указывает на единственный способ решения; в них решение начинается с дополнительного построения. В других задачах применяется смешанный прием решения, а дополнительное построение реализует только часть решения. В третьих задачах дополнительное построение во многих случаях делает решение задачи устным.

Решая задания олимпиады «Физтех-2014», я встретилась с такой задачей:

(Олимпиада ФИЗТЕХ-2014, 9 класс. Задача «Длина ломаной») Длины сторон треугольника ABC равны 13, 22 и 27. AA_1, BB_1 и CC_1 — его медианы, а AA_2, BB_2 и CC_2 — его высоты. Найдите длину замкнутой ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$. [4]

При ее решении я неоднократно применяла теорему косинусов и ряд других громоздких и «скучных» вычислительных выкладок, отдельно высчитывала длину каждого звена ломаной. Ответ у меня получился верный, но моя учительница предложила мне решить задачу с помощью дополнительного построения.





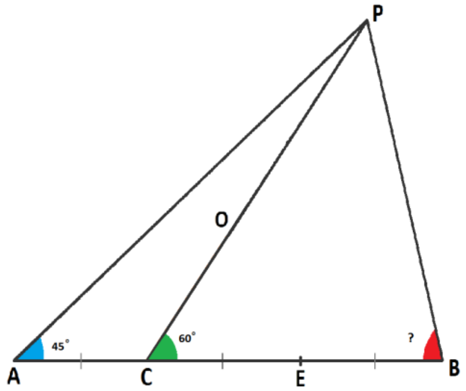
Я построила окружности на сторонах треугольника как на диаметрах, и оказалось, что звенья ломаной, как показано на рисунке, попарно являются радиусами этих окружностей, и вся задача сводится к нахождению периметра треугольника. Введенное дополнительное построение позволило решить задачу устно. Удивительное по простоте и красоте решение, избавляющее от нудных и сложных вычислительных преобразований!

Дополнительное построение – это способ, помогающий легко решать сложные задачи, избегая громоздких решений. В качестве примера хочу привести своё решение с применением дополнительного построения еще одной задачи:

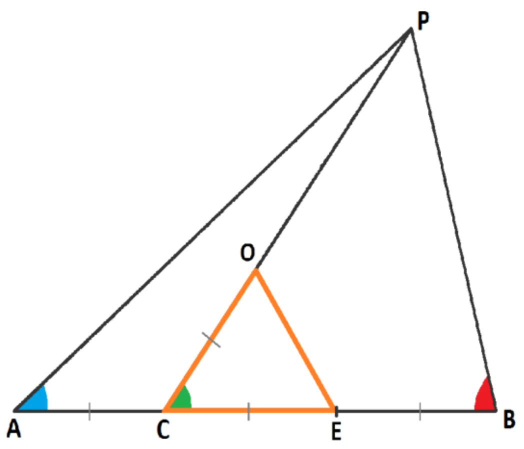
(Международный турнир школьников «Дружба-88» [1, с. 116]*).*

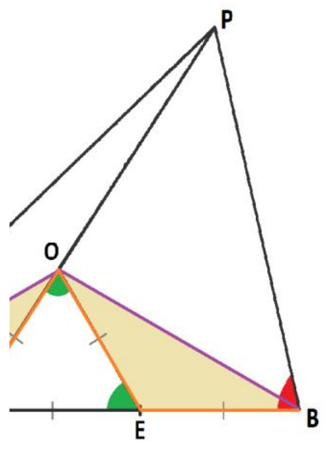
На отрезке АВ отмечена точка С таким образом, что АС: СВ=1:2. Из точек А и В провели лучи до пересечения в точке Р, причем ∠PAB=45^o, ∠PCB=60^o. Найти ∠PBA.

Проводим дополнительное построение: отмечаем точку Е – середину отрезка СВ и откладываем на луче СР от точки С отрезок СО, равный отрезку СЕ.



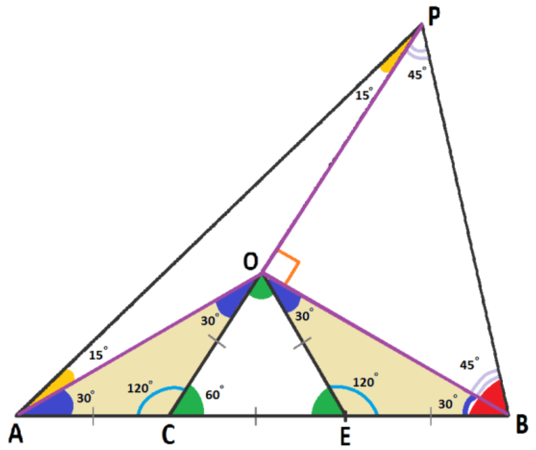
Соединяем точку О с точками Е, А и В. Рассматриваем треугольник СОЕ. Так как стороны СО и СЕ равны, треугольник равнобедренный с основанием ОЕ; но так как ∠PCB=60^o делаем вывод, что треугольник равносторонний. Из этого следует равенство отрезков АС=СЕ=ЕВ=СО=ОЕ,





Рассмотрим равнобедренные треугольники АСО и ВЕО и докажем их равенство: углы АСО и ОЕВ равны, как смежные с равными углами ОСЕ И ОЕС. ∠ АСО=180^o-60^o=120^o; ∠ВЕО=180^o-60^o=120^o. АС=ЕВ по условию, ОС=ОЕ, как стороны равностороннего треугольника, следовательно, треугольники равны по первому признаку равенства треугольников.

Углы при основаниях этих треугольников равны (180-120):2=30°.



∠PAO=∠PAB-∠BAO=45°-30°=15°.

∠AOP=180°-30°=150°.

∠APO=180°-(150°+15°)=15°.

Треугольник AOP равнобедренный с основанием AP и AO=PO, из чего следует, что OP=OB; Значит, треугольник POB тоже равнобедренный. ∠POB=180°-(30°+60°)=90°, а углы при основании треугольника ∠BPO и ∠PBO равны по (180°-90°):2=45°. Искомый ∠B=∠EBO+∠PBO=30°+45°=75°.

Таким образом, мне удалось обойтись при решении этой задачи без трудоемких вычислений, привлечения элементов тригонометрии, теорем синусов и косинусов, обычно используемых при решении треугольников.

Я решила взять в качестве примера применения способа дополнительного построения именно эту задачу, ведь после применения дополнительного построения решение задачи стало элементарным, в нем нет трудностей в счете и последовательности действий для ее решения. У В.Г. Болтянского, есть формула «математической эстетики»: *красота* = *наглядность* + *неожиданность* + *простота* + … [3].

Думаю, что приведенная мною задача полностью соответствует этому определению. И мне показалось увлекательным подбирать задачи, которые благодаря искусному дополнительному построению приводят к изящным очевидным решениям.

Способ решения задач на дополнительное построение показался мне интересным для рассмотрения, помогает увидеть дополнительные параметры, которых нет в условии, приводящие к наглядному определению недостающих данных, необходимых для получения ответа и зачастую приводит решение планиметрической задачи к наглядному, неожиданному и простому решению, а главное, красивому. Ведь математика - это не просто цифры и формулы, это еще и гармония и красота. «Стремление мозга к экономии энергии объясняет культурные и исторические отличия в восприятии красоты. Человеку кажется красивым то, что более привычно и что легче воспринимается» (Петр Винкельман, профессор Калифорнийского университета) [2].

Список литературы

1. Ясиновый Э.А. Международный турнир школьников по математике ,«Дружба-88», журнал «Математика в школе». 1989, №2, с.116.
2. Математическое понятие Красоты. Интернет, http://trendclub.ru/.
3. *Болтянский Б. Г. Математическая культура и эстетика, журнал «Математика в школе», 1982, № 2.*
4. http://olymponline.mipt.ru/task/8/11.