Автор:

Рошо Даяна Рашедовна

ученица 9 «А» класса

Руководитель:

Данелян Сусанна Амирбековна

учитель математики, заслуженный учитель РФ

МОУ «Гимназия № 12»

г. Волгоград, Волгоградская область

Графические методы решения заданий с параметрами

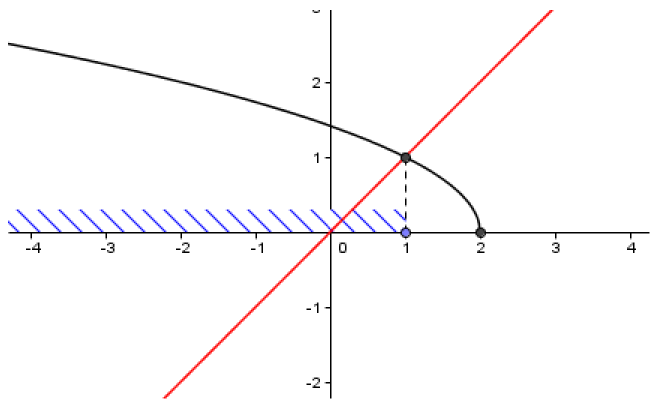
При решении различных уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств, особенно с параметрами и модулями, я предпочитаю использовать графический способ решения. Он менее объемен, более нагляден и красив.

Когда я столкнулась с иррациональными уравнениями и неравенствами, у меня отпали последние сомнения, при их решении выбор графического метода приводит к бесспорному выигрышу во времени, затраченном на решения, в объеме самого решения и в уменьшении возможных ошибок. А главное, он более доступен для понимания.

Решение иррациональных уравнений и неравенств предполагает переход к решению равносильных им систем, а то и совокупности систем неравенств (четные степени). Например:

$$\sqrt[2k]{f(x)} < \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \left(\varphi(x)\right)^{2k} \\ f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}, \quad \sqrt[2k]{f(x)} < \varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) > (\varphi(x))^{2k} \end{cases} \end{array}\right.$$

Очевидно, что эти очень объемные и трудоемкие решения зачастую приводят к большому числу ошибок. На примере простейшего неравенства из широко известного сборника «468 конкурсных задач» (ВГТУ), я проведу сравнения между графическим и, общепринятым, аналитическим методами решения.

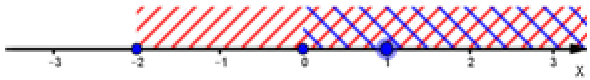


Решите неравенство: $\sqrt{2-x} > x$

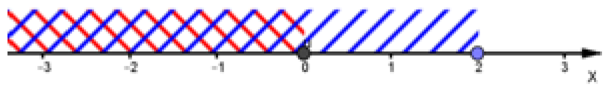
1. Аналитический метод:

Неравенство равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} x < 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \quad \textit{или} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 2 - x > x^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x < 0, \\ x \leq 2 \end{cases} \quad \textit{или} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$$



Решаем неравенство:

$x^2 + x - 2 < 0$

$(x+2)(x-1) < 0, \quad -2 < x < 1$

Объединяя полученные решения, получаем: $x < 1$

2. Графический метод:

Строим графики функций $y = \sqrt{2-x}$ и $y = x$.

Находим их точку пересечения и получаем ответ: $x < 1$

Даже решая это простое неравенство, мы убеждаемся в неоспоримой выигрышности графического способа.

Но, когда в этом же сборнике я столкнулась с неравенствами вида $\sqrt{3x + x^2} < 4 - x$, то их решение оказалось для меня сложным. Мне просто не хватало накопленных мною знаний о графиках.

Возник вопрос, как строить графики функций вида $y = \sqrt[n]{f(x)}$? $(n \in N)$

Случай, когда подкоренная функция $f(x) = kx + b, \;\; k \neq 0$ – линейная, разобран в школьных учебниках и широко освещен в массовой литературе.

Однако, для $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ - квадратичная функция, мне не удалось найти подробного исследования получаемых графиков в литературе.

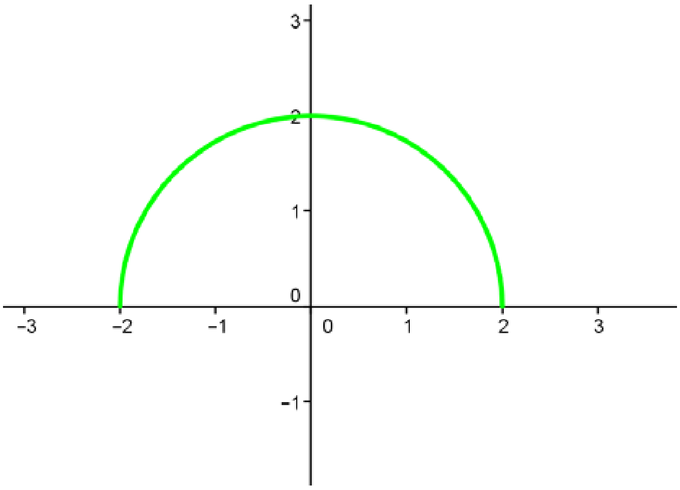
Поэтому, я поставила себе задачу - научиться строить графики функций вида $y = \sqrt[n]{f(x)}$, где $n \in N$, а $f(x)$:

А) линейная функция;

Б) квадратичная функция.

Первый случай широко исследуется в литературе, а второй наиболее интересен при $a < 0, D > 0$

$y = \sqrt{-x^2 + 4}$



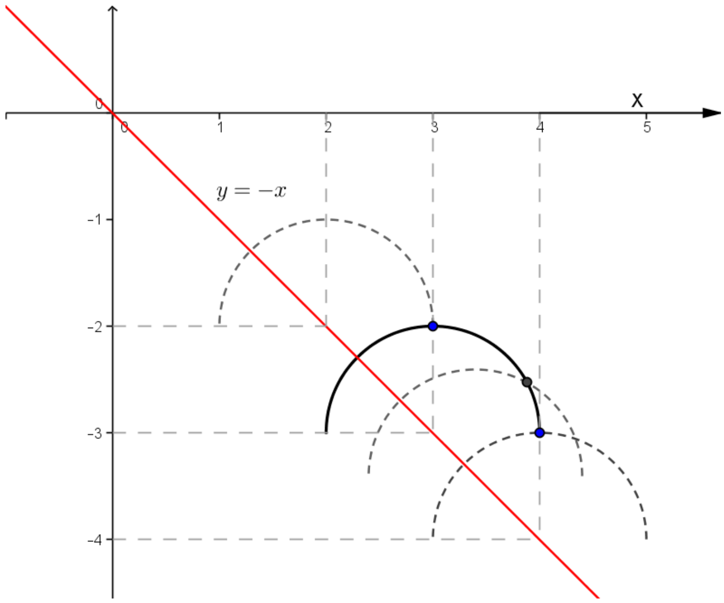
На графике видно, что ответом этого неравенства является полуокружность.

(МГУ. Из вариантов вступительных экз.). Журнал «Математика в школе» №1, 1995 г.

При каких значениях параметра В уравнение имеет $b + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2bx - b^2 - x^2}$ одно решение? Напишем уравнение в виде: $\sqrt{-(x+3)^2 + 1} - 3 = \sqrt{-(x-b)^2 - 1} - b$. Подкоренные функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c, где\ a < 0\ и\ D > 0$. Согласно примеру, графики функций являются полуокружностями $y = \sqrt{f(x)}$. Заметим, что их центры (3; -3) и (b; -b) лежат на прямой $y = -x$

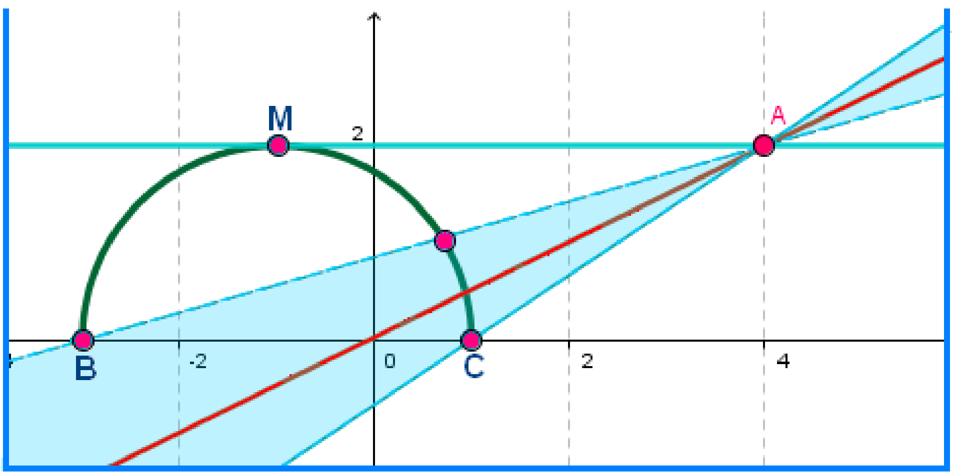
$-\sqrt{(x-3)^2 + 1} - 3 = \sqrt{-(x-b)^2 - 1} - b$

Ответ: $\boldsymbol{b} \in [\mathbf{2}; \mathbf{3}) \cup (\mathbf{3}; \mathbf{4}]$



ЕГЭ-2013, Центр, 03.06.2013. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение ax $+\sqrt{3-2x-x^2}=$ 4a+2 имеет единственный корень. Перепишем уравнение в следующем виде: $\sqrt{3-2x-x^2}$ = -ax+ 4a+2. (Случай a < 0, D > 0 сжимать)

Графиком функции y=$\sqrt{3-2x-x^2}=\sqrt{-(x+1)^2+4}$ является полуокружность с центром в точке с координатами (-1; 0), расположенная в верхней полуплоскости относительно оси абсцисс, радиусом, равным 2 и граничными точками B(-3; 0), C(1;0) . Уравнение y=-ax+4a+2 задает прямые, проходящие через точку A(4;2) с угловым коэффициентом k = -a. Находим граничные положения прямой y= - ax+4a+2, удовлетворяющие условию задачи:



Значение $a_1= -\frac{2}{7}$ находим из условия прохождения прямой через граничную точку B(-3; 0): 0=3a+4a+2 . Значение $a_2= -\frac{2}{3}$ находим из условия прохождения прямой через точку C(1; 0): 0=-1a+4a+2. Значение $a_3=0$ получаем в случае касания прямой y= -ax +4a+2 и полуокружности, заданной функцией $y=\sqrt{3-2x-x^2}$, в точке M. По рисунку видно, что искомое уравнение имеет один корень при $-\frac{2}{3} \leq a < -\frac{2}{7}$, a=0.

Ответ: $-\frac{2}{3} \leq a < -\frac{2}{7}$, a=0.